Matematikai statisztika
Binomiális valószínűségeloszlás. A szemcsealak minősítéses vizsgálatának mintaelemszáma. 1970. augusztus. *(2006. április)*
Extrémérték-eloszlás, extremális-eloszlás *(**2022.** május)*
Gauss- és Student-eloszlások ábrái *(2006. április)*
Hipergeometrikus eloszlástól az OC-görbéig *(**2023.** december)*
Konfidencia jellemzők *(**2022.** május)*
Néhány gondolat a beton matematikai statisztikai értékeléséhez. Szerző: **György** László. Magyar Építőipar. 1975. 6. szám. pp. 338-339. *(2011. február)* **Lásd: Pályatársak-írásai**
OC-görbe, működési jelleggörbe, elfogadási jelleggörbe *(2010. augusztus)*
Szórás számítás összefüggésének levezetése *(2006. október)*
Termékek minőségellenőrzési hibaszintje fogalmának matematikai statisztikai értelmezése *(**2022.** május)*

és az utolsó fájl:

Szemmegoszlási jellemzők grafoanalitikus számításmódja *(2001. január)*

A szemcsealak minősítéses vizsgálatának mintaelemszáma

Dr. KAUSAY TIBOR

Bevezetés

A hazai és külföldi gyakorlatban és szabályozásban az adalékanyag szemcsealak szerinti jellemzésének ez időszerint úgyszólván egyeduralkodó módszere a minősítéses jellemzésmód.

A minősítéses jellemzésmód — szemben a tényleges eloszlást vizsgáló méréses jellemzésmóddal — meghatározott elemszámú minta vizsgálata alapján azt határozza meg, hogy az anyag mekkora részhányada esik a valamilyen kritériummal definiált selejtes zónába. Ha ez a részhányad a megengedettnél nagyobb, akkor az anyaghalmaz a vizsgált tulajdonság szempontjából selejtesnek minősül. Az így minősített halmaz elfogadása vagy visszautasítása az átadó és átvevő számára egyaránt bizonyos kockázattal jár, ugyanis a minta elemszáma jelentősen befolyásolja az ítélet megbízhatóságát.

A szemcsealak minősítéses vizsgálatának helyes mintaelemszámát illetően még napjainkban sem alakult ki határozott állásfoglalás, és az általunk ismert, főleg empirián alapuló vélemények is a legkülönfélébbek. Az irodalomban a mérésre ajánlott szemcsék száma 30—500-ig terjed, az optimum pedig 250 szemcse körül mozog.

Tanulmányunkban a minta elemszámával kapcsolatos kérdés megoldását valószínűségszámítás segítségével kívánjuk megközelíteni.

Számarány vizsgálat

Kiindulásul határozzuk meg mi a valószínűsége annak, hogy az N szemcséből álló és M selejtes alakú szemcsét tartalmazó adalékanyag halmazból visszatevés nélküli, reprezentatív mintavétel útján nyert n elemű mintában levő selejtes szemcsék száma k. Mint az irodalomból ismeretes [1], a keresett valószínűséget a különböző $k=0, 1, 2, \ldots n$ értékekre a

$$P_k=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

hipergeometrikus valószínűségeloszlás adja meg. A gyakorlatot pontosan leíró hipergeometrikus eloszlás esetén, a gyakorlati csoportos visszavetés nélküli mintavétellel azonos elméleti egyenkénti visszatevés nélküli mintavétel következtében, minden egyes mintaelem kivételekor megváltozik a halmaz eredetileg $p=M/N$ selejtaránya, és egy elem csak egyszer kerülhet a mintába.

A hipergeometrikus eloszlás felhasználása körül nehézséget pusztán az jelent, hogy nagy N számok mellett — esetünkben N=többszázezer db/t — a valószínűségek kiszámítása rendkívül körülményes. Ezért azzal a közelítő feltevéssel élünk, hogy a minta egyes elemei csak a szóban forgó elem vizsgálatának idejére kerülnek ki a halmazból. Ezen visszatevéses reprezentatív mintavétel következtében a selejtes szemcsék az adott halmazra jellemző részaránya a vizsgálat folyamán változatlan marad, azaz $p=M/N=konstans$. Ugyanakkor fennáll annak a lehetősége, hogy valamely szemcse a halmazból többször is a mintába kerül.

Visszatevéses mintavétel feltételezése mellett a keresett valószínűséget a

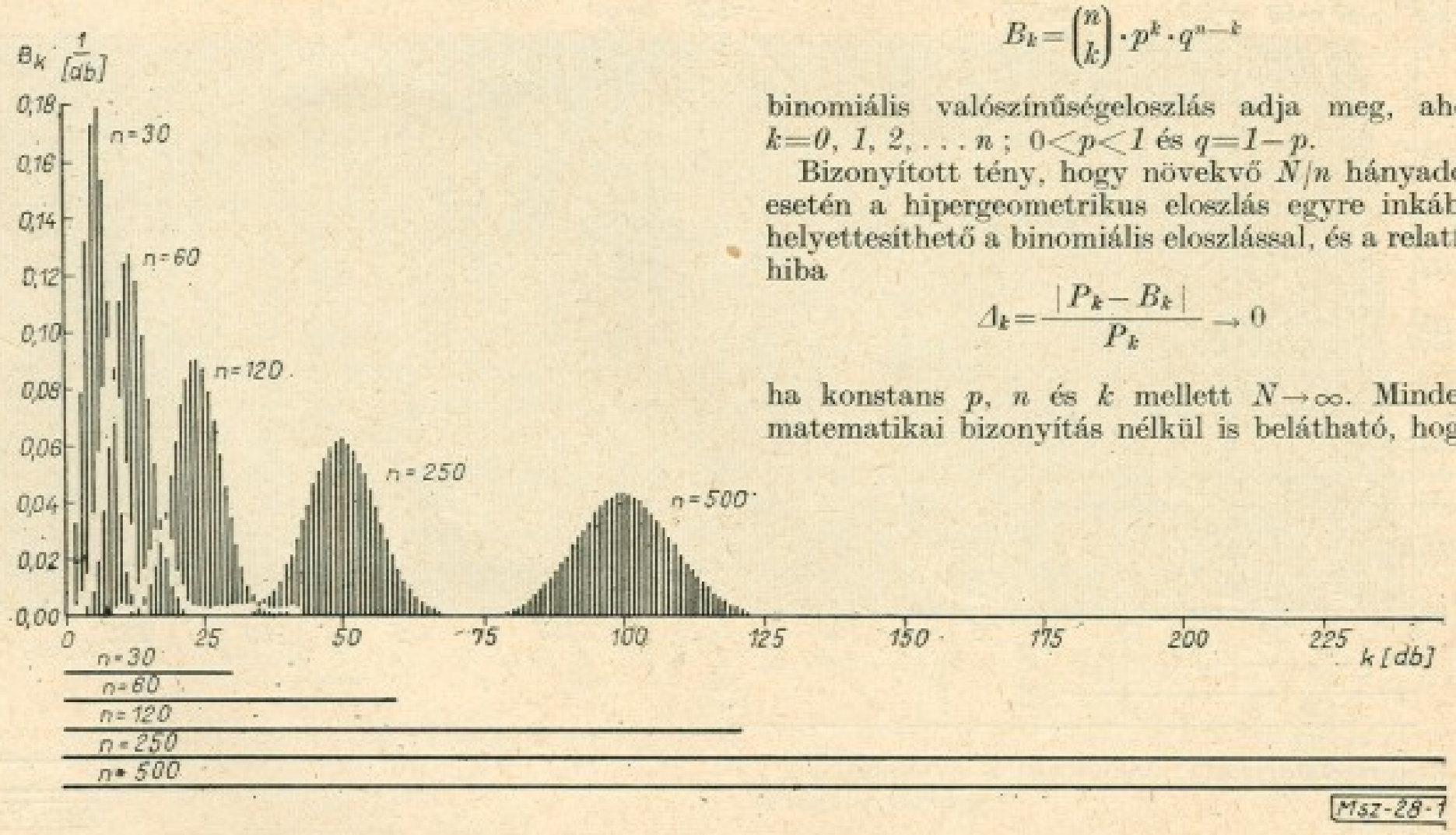
$$B_k=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

binomiális valószínűségeloszlás adja meg, ahol $k=0, 1, 2, \ldots n$; $0<p<1$ és $q=1-p$.

Bizonyított tény, hogy növekvő N/n hányados esetén a hipergeometrikus eloszlás egyre inkább helyettesíthető a binomiális eloszlással, és a relatív hiba

$$\Delta_k=\frac{|P_k-B_k|}{P_k}\to 0$$

ha konstans p, n és k mellett $N\to\infty$. Minden matematikai bizonyítás nélkül is belátható, hogy



1. ábra. n-edrendű, $p=0{,}2$ paraméterű binomiális valószínűségeloszlások gyakoriságfüggvénye

az adalékanyag halmaz alaki viszonyait a visszatevés nélküli és visszatevéses mintavétel közötti különbség számottevően nem zavarja meg.

A valóság binomiális eloszlással történő közelítése azért előnyös, mert az

$$x! \cong \sqrt{2\pi} \cdot x^{x+\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{12x}-x}$$

ahol x pozitív egész szám, Stirling formula [2] bevezetése után a binomiális eloszlás viszonylag egyszerűen kezelhető.

Adott n és p esetén a $k=0, 1, 2, \ldots n$ értékekhez tartozó B_k valószínűségek meghatározzák az n-edrendű, p paraméterű binomiális valószínűségeloszlás diszkrét gyakoriság- és eloszlásfüggvényét, amely utóbbi birtokában képet alkothatunk az n elemű minta segítségével a p selejtarányú halmazról szerzett információ pontosságáról. A p selejtaránnyal jellemzett halmaz megítélésére vett minta optimális elemszámának kiválasztása a p paraméterű, különböző rendű eloszlásfüggvények összevetése útján lehetséges.

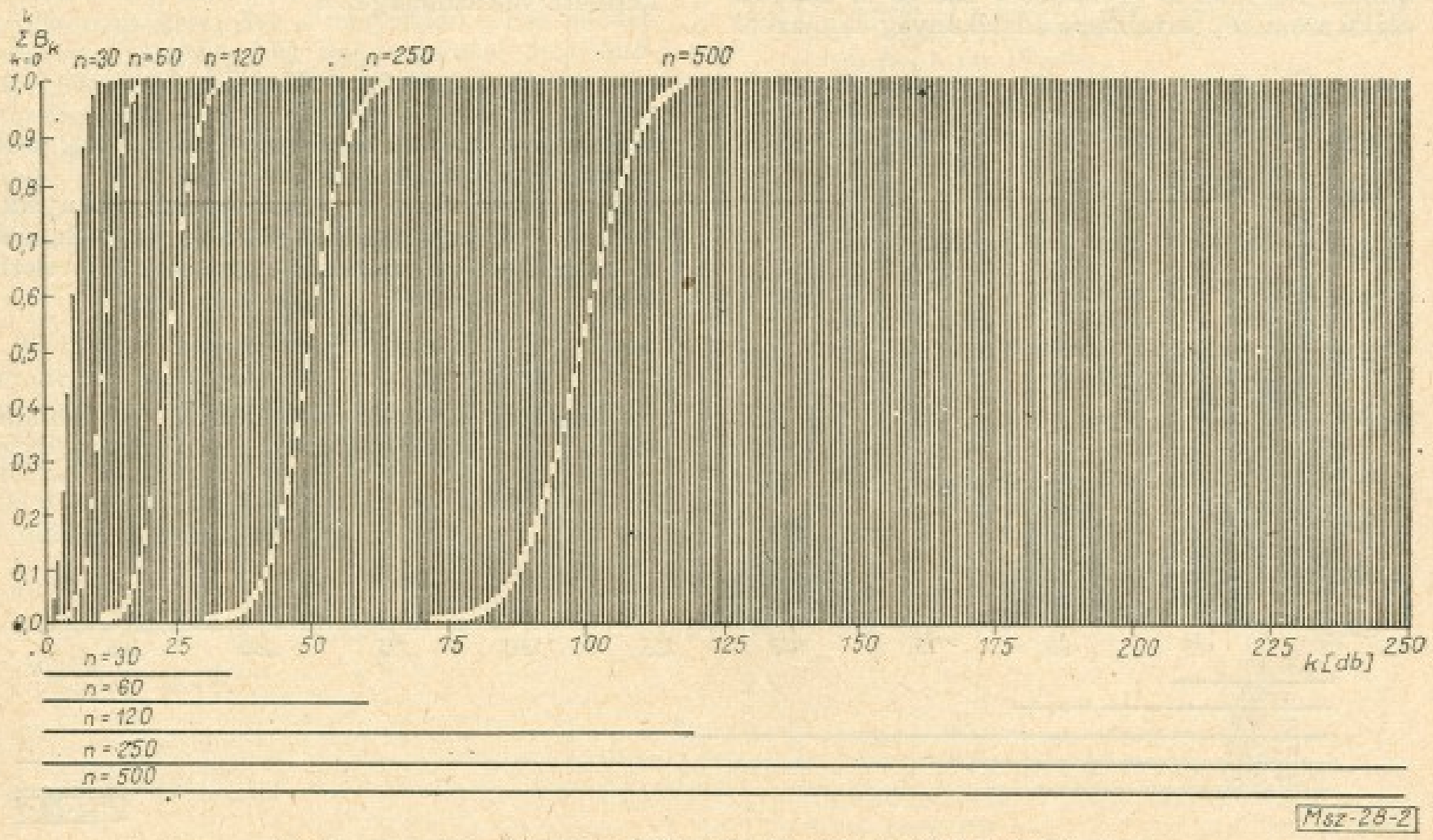
A legelterjedtebben kritériumként elfogadott $p=0{,}2$ selejtarányhoz és a gyakorlattal összhangban levő $n=30, 60, 120, 250, 500$ mintaelemszámhoz tartozó *0,2 paraméterű és 30-, 60-, 120-, 250-, 500-adrendű* binomiális valószínűségeloszlások gyakoriságfüggvényét az *1. ábrán*, eloszlásfüggvényét a *2. ábrán* tüntettük fel. Tekintve, hogy a *2. ábra* az optimális elemszám kiválasztására nem eléggé szemléletes, célszerű az eloszlásfüggvényeket $(k/n-p)\cdot 100$ abszcissza beosztású és

$$\left| \sum_{k=0}^{np} B_k - \sum_{k=0}^{k} B_k \right| \cdot 100$$

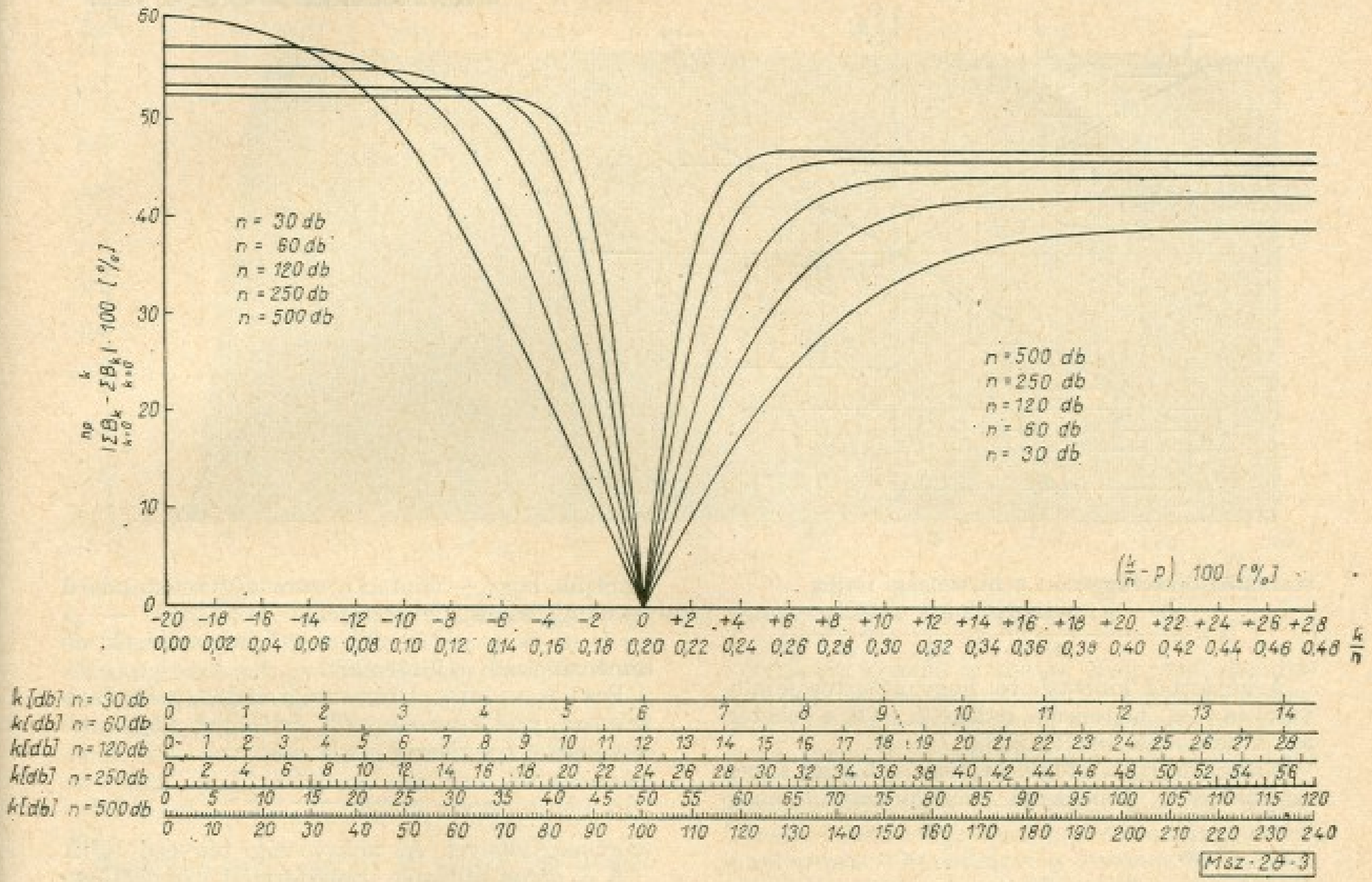
ordinata beosztású koordinátarendszerbe transzformálni. A *3. ábrán* a transzformált diszkrét eloszlásfüggvény — a negatív féltengelyen alsó-, a pozitív féltengelyen felső-, — folytonos burkológörbéjét tüntettük fel a *4. ábra* vázlata szerint. A transzformált eloszlásfüggvény abszcissza skálája az ítélet hibáját, ordináta skálája a kérdéses hibánál kisebb hibával rendelkező ítéletek százalékos valószínűségösszegét adja meg az alábbi értelmezésben.

Az eloszlásfüggvény természetéből következik, hogy két abszcissza érték, mint határok által adott, a két abszcissza határhoz tartozó ordináta érték különbségeként képzett valószínűségösszeg a felső határ valószínűségét tartalmazza, az alsó határét pedig nem. A transzformált eloszlásfüggvény esetében a koordinátarendszer zérus kezdőpontja a negatív féltengelyre nézve felső határt, a pozitív féltengelyre nézve alsó határt képez. Így valamely ítélethibánál kisebb hibával rendelkező ítéletek valószínűségösszegében a negatív féltengelyen a zérus ítélethiba valószínűsége bennfoglaltatik, a határként adott ítélethiba valószínűsége nem, a pozitív féltengelyen pedig a határként adott ítélethiba valószínűsége foglaltatik benn, és a zérus ítélethiba valószínűsége nem. A zérus ítélethiba valószínűsége a transzformált eloszlásfüggvény görbéjén a negatív féltengely, a zérus koordináta kezdőponttól vett első értelmezési helyén jelentkezik *(4. ábra)*.

Valamely mintavétel ítéleteinek adott selejtrészhányadhoz tartozó megbízhatósága mérőszámául jól használható a biztonsági index, amely alatt a transzformált eloszlásfüggvény két szára, azok abszcisszával párhuzamos érintői és a zérus abszcisszájú egyenes által határolt területek ez utóbbira



2. ábra. n-edrendű, $p=0{,}2$ paraméterű binomiális valószínűségeloszlások eloszlásfüggvénye



3. ábra. n-edrendű, $p = 0{,}2$ paraméterű binomiális valószínűségeloszlások transzformált eloszlásfüggvénye

vett elsőrendű nyomatéka abszolútértékének összegét értjük. Az elsőrendű nyomaték ugyanis megfelelően kihangsúlyozza az abszolútértékre nagyobb ítélethibánál fellépő valószínűségösszeg kedvezőtlenebb szerepét. A biztonsági index a *4. ábra* szerint az

$$I = 10^6 \left[\sum_{k=0}^{np-1} \left(p - \frac{2k+1}{2n} \right) \frac{\sum_{k=0}^{k<np} B_k}{n} + \sum_{k=np}^{n} \left(\frac{2k+1}{2n} - p \right) \frac{1 - \sum_{k=0}^{k \geqq np} B_k}{n} \right] =$$

$$= \frac{10^6}{n^2} \left[\sum_{k=0}^{np-1} (np - k - 0{,}5) \sum_{k=0}^{k<np} B_k + \sum_{k=np}^{n} (k + 0{,}5 - np) \left(1 - \sum_{k=0}^{k \geqq np} B_k \right) \right]$$

kifejezéssel írható le. Értéke nevezetlen szám. A tagonkénti nyomatékszámítást elkerülhetjük a biztonsági index és a valószínűségeloszlás szórása közötti összefüggés felhasználásával.

Ismeretes, hogy a szórás négyzete egyenlő a gyakoriságfüggvény alatti terület a várható érték egyenesére vett másodrendű nyomatékával. Bizonyítható, hogy ez tovább egyenlő az eloszlásfüggvény, valamint a zérus és az egységnyi ordinátájú egyenesek a várható értékig terjedő, illetve a várható értéknél kezdődő szakasza közé eső területek a várható érték egyenesére vett elsőrendű nyomatéka abszolútértéke összegének kétszeresével. A várható érték egyenese azonos a transzformált eloszlásfüggvény zérus abszcisszájú egyenesével, ezért a szórás négyzete

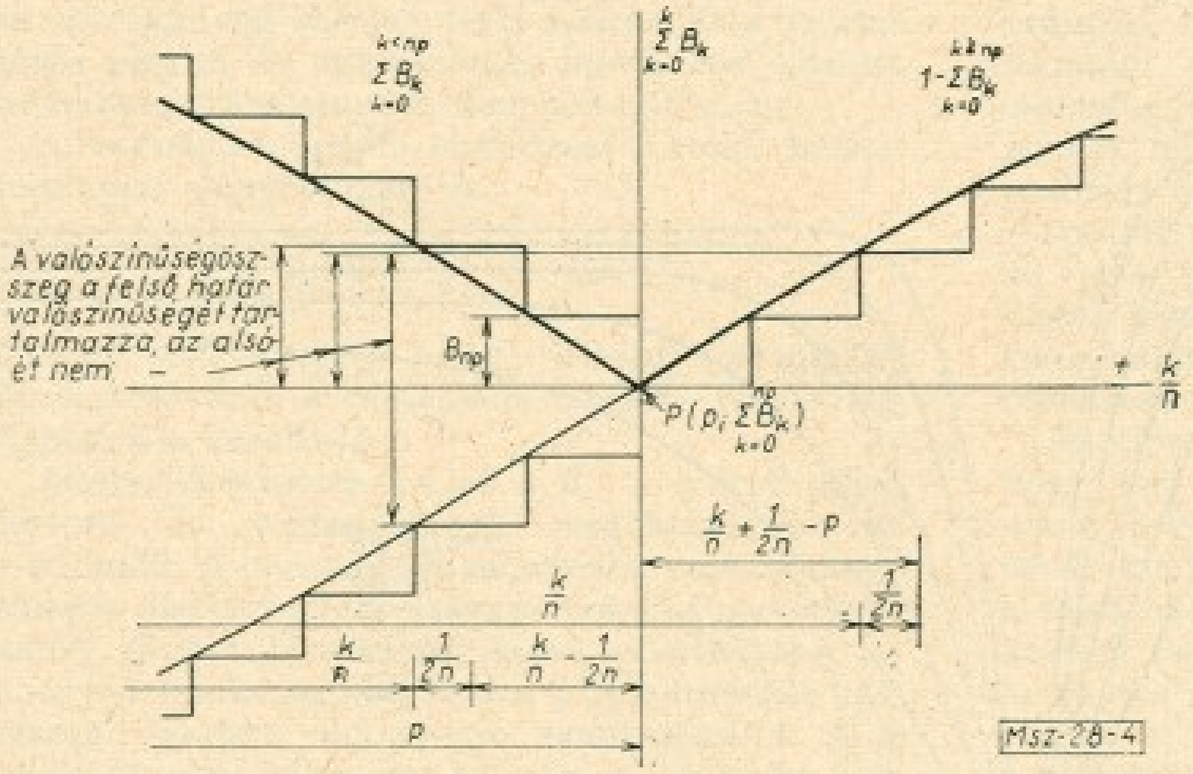
$$\sigma^2 = 2 \left[\sum_{k=0}^{np-1} (np - k - 0{,}5) \sum_{k=0}^{k<np} B_k + \sum_{k=np}^{n} (k + 0{,}5 - np) \left(1 - \sum_{k=0}^{k \geqq np} B_k \right) \right] \text{ [db}^2\text{]}$$

és a biztonsági index

$$I = \frac{10^6}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{n^2}$$

Felhasználva a binomiális valószínűségeloszlás szórásnégyzetének

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1 - p) = n \cdot (p - p^2) \text{ [db}^2\text{]}$$



4. ábra. A transzformált eloszlásfüggvény vázlata

standard összefüggését, a biztonsági index

$$I=\frac{10^6}{2}\cdot\frac{n\cdot(p-p^2)}{n^2}=\frac{10^6}{2}\cdot\frac{p-p^2}{n}$$

A képletből kiolvasható, hogy a biztos mintavétel ($n=\infty$) biztonsági indexe $I_\infty=0$, a lehetetlen mintavételé ($n=0$) pedig $I_0=\infty$.

A szórásnégyzet utóbbi képlete, valamint annak származékai dimenziója magyarázatául megemlítjük, hogy — mint az a szórásnégyzet standard összefüggésének levezetéséből belátható — a $q=1-p$ és a $p\cdot(1-p)=p-p^2$ mennyiségek *db* dimenziójúnak tekintendők.

Fentiek szerint a biztonsági index arányos a szórásnégyzet transzformált értékével, vagy ami ugyanaz, a k/n relatív gyakoriság

$$\frac{\sigma^2}{n^2}=\frac{p-p^2}{n}$$

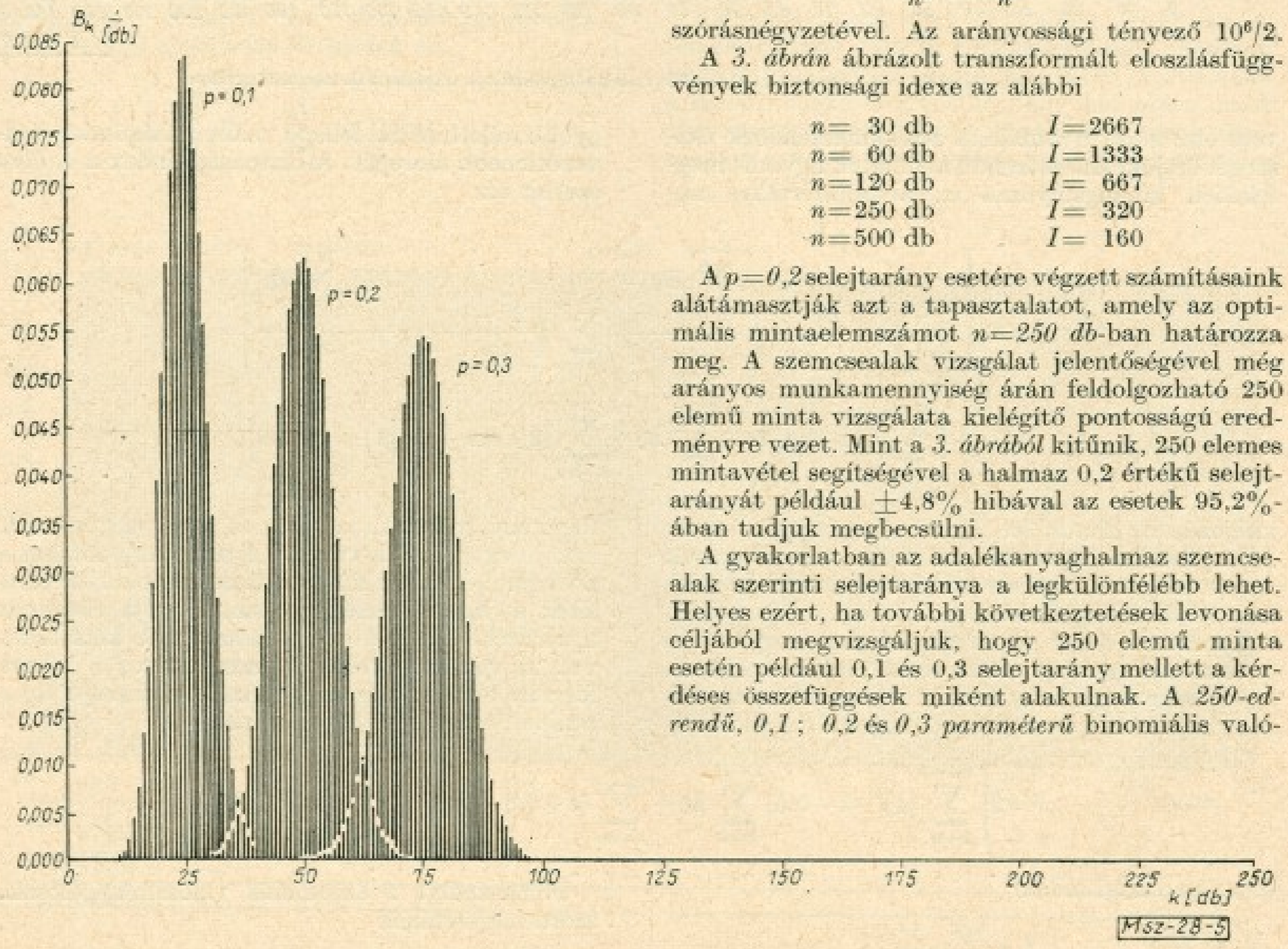
szórásnégyzetével. Az arányossági tényező $10^6/2$.

A *3. ábrán* ábrázolt transzformált eloszlásfüggvények biztonsági idexe az alábbi

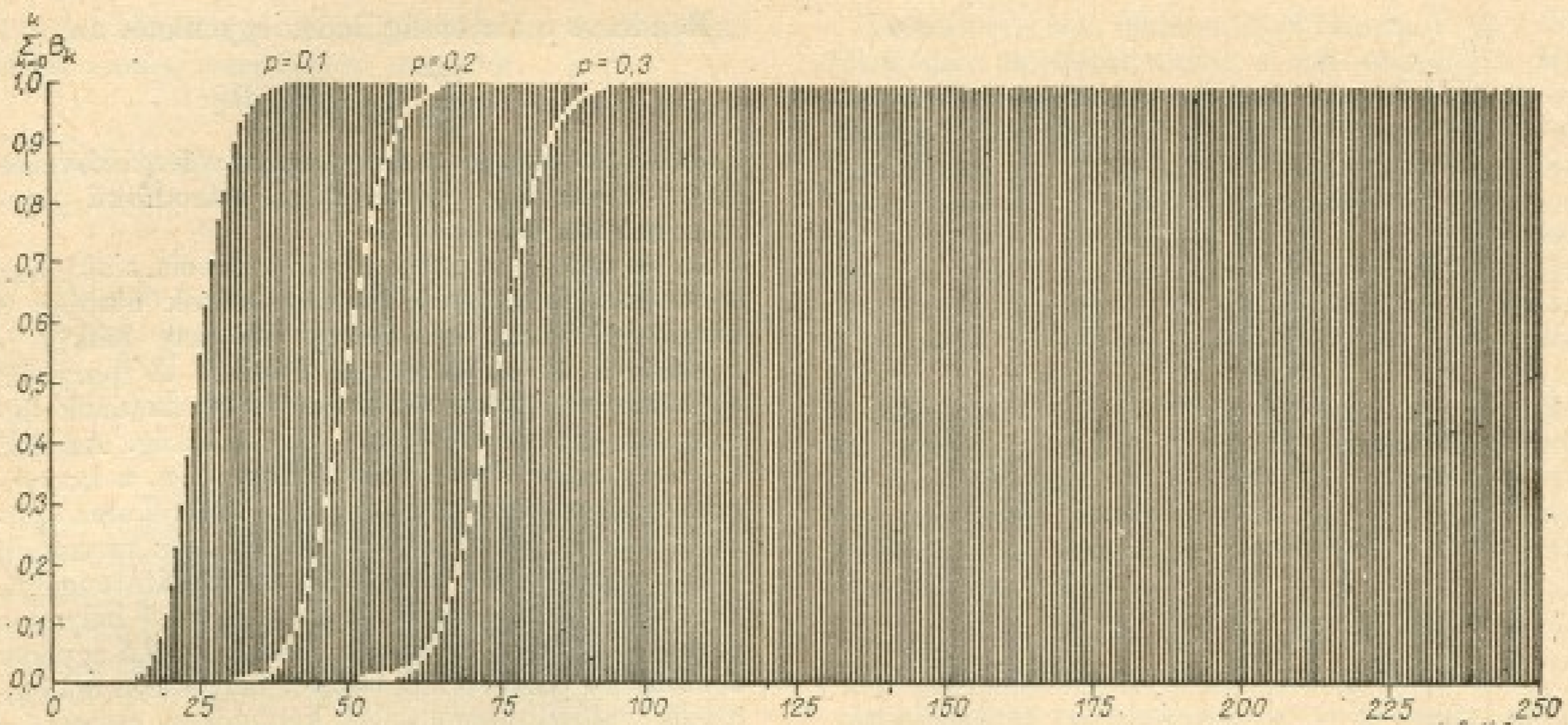
$n=$ 30 db	$I=2667$
$n=$ 60 db	$I=1333$
$n=120$ db	$I=$ 667
$n=250$ db	$I=$ 320
$n=500$ db	$I=$ 160

A $p=0{,}2$ selejtarány esetére végzett számításaink alátámasztják azt a tapasztalatot, amely az optimális mintaelemszámot $n=250$ *db*-ban határozza meg. A szemcsealak vizsgálat jelentőségével még arányos munkamennyiség árán feldolgozható 250 elemű minta vizsgálata kielégítő pontosságú eredményre vezet. Mint a *3. ábrából* kitűnik, 250 elemes mintavétel segítségével a halmaz 0,2 értékű selejtarányát például $\pm 4{,}8\%$ hibával az esetek 95,2%-ában tudjuk megbecsülni.

A gyakorlatban az adalékanyaghalmaz szemcsealak szerinti selejtaránya a legkülönfélébb lehet. Helyes ezért, ha további következtetések levonása céljából megvizsgáljuk, hogy 250 elemű minta esetén például 0,1 és 0,3 selejtarány mellett a kérdéses összefüggések miként alakulnak. A *250-edrendű, 0,1 ; 0,2* és *0,3 paraméterű* binomiális való-



5. ábra. 250-edrendű, p paraméterű binomiális valószínűségeloszlások gyakoriságfüggvénye

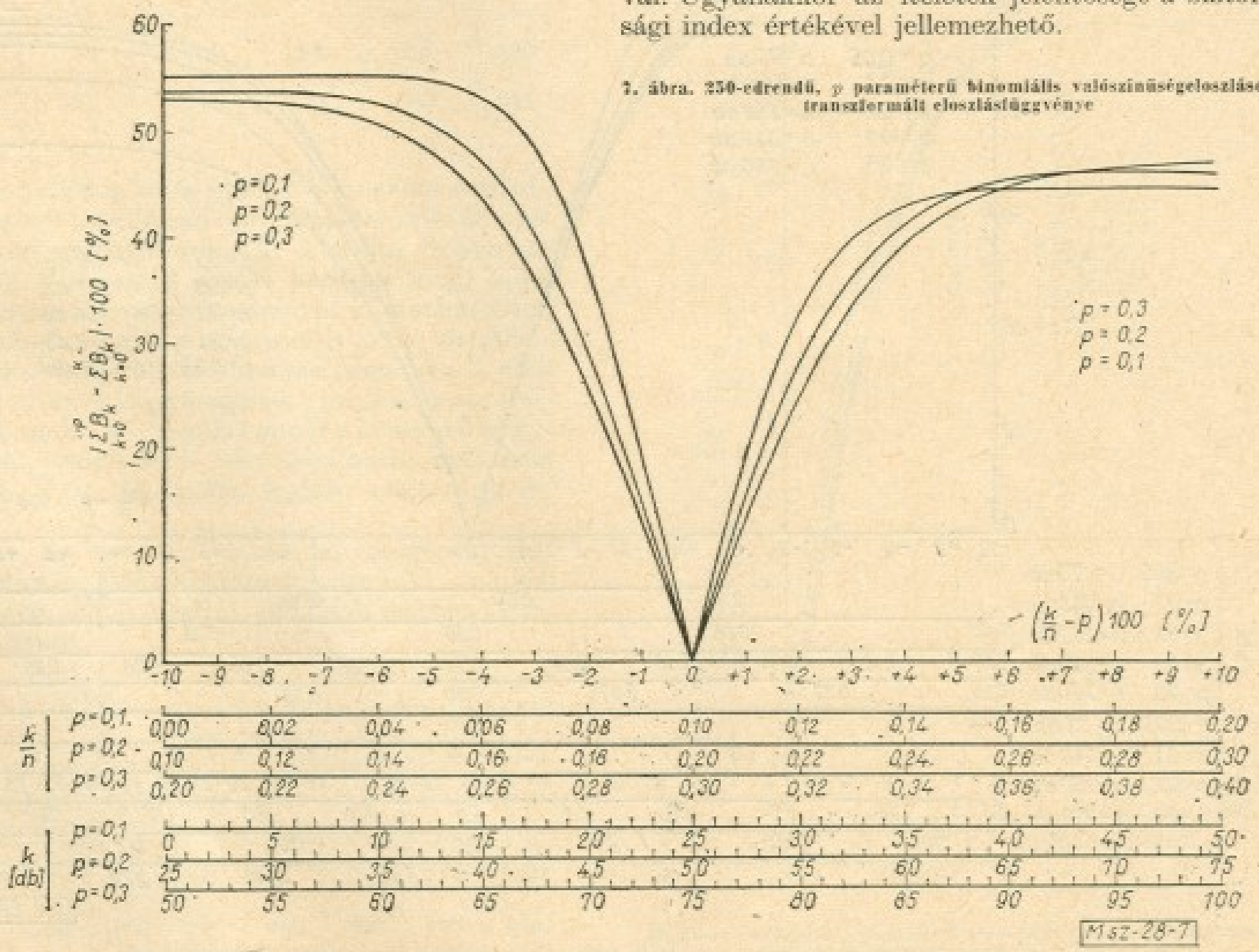


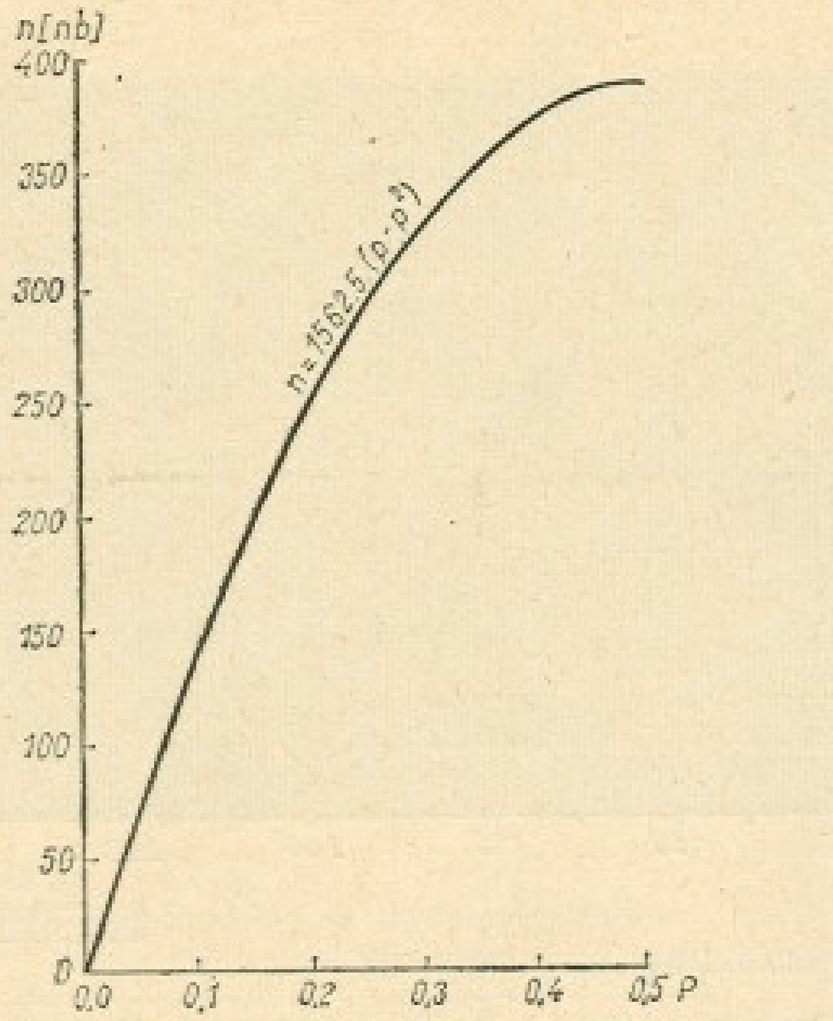
6. ábra. 250-edrendű, p paraméterű binomiális valószínűségeloszlások eloszlásfüggvénye

színűségeloszlások gyakoriságfüggvényét az *5. ábrán*, eloszlásfüggvényét a *6. ábrán* és transzformált eloszlásfüggvényét a *7. ábrán* mutatjuk be. A *7. ábrán* láthatjuk, hogy a p paraméter növekedésével az ítélet megbízhatósága csökken. A biztonsági index $p=0,1$; $0,2$; $0,3$ esetén sorra $I=180$, 320, 420.

Meggyőződésünk szerint az azonos jelentőségű ítéletek az egyenlő biztonság elvén kell alapuljanak. Ennek az elvnek akkor teszünk eleget, ha a bázisként választott *0,2 paraméterű 250-edrendű* binomiális valószínűségeloszlás mellé olyan p, n értékpárokkal meghatározott binomiális valószínűségeloszlásokat rendelünk, amelyek transzformált eloszlásfüggvényének biztonsági indexe közel azonos a bázisfüggvény hasonló mérőszámával. Ugyanakkor az ítéletek jelentősége a biztonsági index értékével jellemezhető.

7. ábra. 250-edrendű, p paraméterű binomiális valószínűségeloszlások transzformált eloszlásfüggvénye





8. ábra. Összefüggés a p selejtarány és az n mintaelemszám között $I = 320$ biztonsági index esetén

Rendezve a biztonsági index egyenletét az

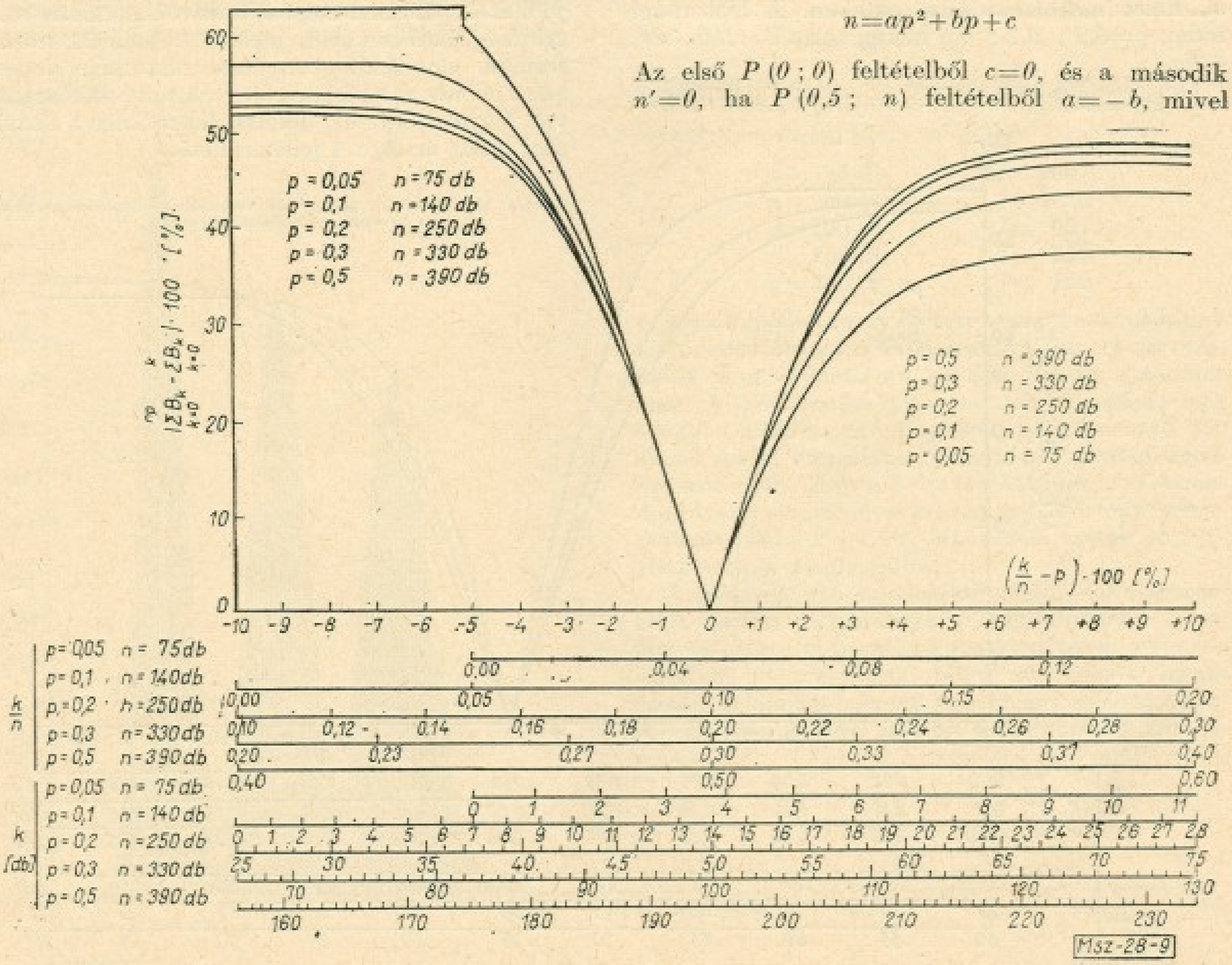
$$n = \frac{10^6}{2 \cdot I} \cdot (p - p^2) \text{ [db]}$$

összefüggést kapjuk, amely szerint a fenti követelményt kielégítő p, n értékpárok másodfokú parabola mentén fekszenek.

Az összefüggést másodfokú parabola alakjában keresve, a következő meggondolások alapján a biztonsági index képletének ismerete nélkül is ugyanerre az eredményre jutunk. A parabola egyenlőre ismeretlennek képzelt egyenletének felírásához három feltételre van szükség. Az első feltétel szerint a parabola átmegy a p, n koordinátarendszer kezdőpontján. Ez a feltétel arra építhető, hogy a görbe a $p=0$ helyen nem metszheti sem a pozitív, sem a negatív n ordinátatengelyt. Másodszor feltételezzük, hogy a $p=0{,}5$ helyen a parabola érintője vízszintes, azaz a $p=0{,}5$ egyenes a parabola tengelye. A feltétel helyessége a binomiális valószínűségeloszlás képletében szereplő p és q mennyiségek felcserélhetőségében rejlik. A harmadik feltétel abból a kívánságból ered, hogy a bázisfüggvény által meghatározott p, n értékpár pontja legyen a parabolának. Ez a harmadik feltétel jelöli ki az első két feltétellel determinált egyparaméteres görbeseregből a keresett parabolát. A másodfokú parabola általános egyenlete

$$n = ap^2 + bp + c$$

Az első $P\,(0\,;\,0)$ feltételből $c=0$, és a második $n'=0$, ha $P\,(0{,}5\,;\ n)$ feltételből $a=-b$, mivel



9. ábra. n-edrendű, p paraméterű binomiális valószínűségeloszlások transzformált eloszlásfüggvénye

$n'=2ap+b$. Ezek felhasználásával a fenti egyenlettel azonos összefüggést nyerünk

$$n=b\cdot(p-p^2)$$

Az eddig levezetett képleteket egybevetve

$$b=\frac{n}{p-p^2}=\frac{10^6}{2\cdot I}=\frac{n^2}{\sigma^2}$$

A b értékét a harmadik feltétel segítségével határozhatjuk meg. Esetünkben a harmadik feltétel $P\ (0{,}2\ ;\ 250)$, illetőleg $I=320$ és $\sigma^2=40\ db^2$, amiből $b=1562{,}5$. A keresett másodfokú parabola képlete tehát

$$n=1562{,}5\cdot(p-p^2)$$

A *8. ábrán* ábrázolt $n=f\ (p)$ összefüggés birtokában határozzuk meg a $p=0{,}1\ ;\ 0{,}2\ ;\ 0{,}3$ és a szélsőeseteket képező $p=0{,}05\ ;\ 0{,}5$ paraméterekhez tartozó mintaelemszámok kerekített értékét, valamint az azokkal jellemzett binomiális valószínűségeloszlások *9. ábrán* feltüntetett transzformált eloszlásfüggvényének biztonsági indexét *(1. táblázat)*

Mindezeket figyelembe véve megállapíthatjuk, hogy az egyenlő biztonság elvének szemelőtt tartásával az adalékanyag szemcsealak szerinti minősítéses jellemzésére vett reprezentatív minta helyesen választott elemszáma kizárólag a halmaz selejtarányának függvénye.

1. táblázat

Néhány gyakoribb p selejtarány értékhez tartozó n mintaelemszám I = 320 biztonsági index esetén

p	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5
n [db] . .	75	140	250	330	390
I	317	321	320	318	321

Gyakorlati minősítés során a halmazból vett kb. 400 szemcsét tartalmazó reprezentatív mintát átlós módszerrel megnyolcadoljuk. A minta értékelését valamely kétnyolcad résszel kezdjük meg, majd egy-egynyolcad rész vizsgálatával folytatjuk mind addig, amíg a mért p selejtarány és a vizsgálati lépcső által megszabott n mintaelemszám a *8. ábra* $n=f\ (p)$ törvényszerűségének megfelelően összhangban nincs. A vizsgálat annál a lépcsőnél hagyható abba, amelynél a mért selejtarány már nem nagyobb a *2. táblázatba* foglalt selejtarány értéknél.

Abban az esetben, ha az így meghatározott selejtarány az előírt kritikus selejtarányt nem lépi túl, a tételt el kell fogadni, ellenkező esetben vissza kell utasítani.

2. táblázat

Számarány vizsgálat mintavételi terve I = 320 biztonsági index esetén

p	0,07	0,10	0,15	0,20	0,25	0,35	0,50
Lépcső	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
n [db] .	100	150	200	250	300	350	400

Visszatérve a *9. ábrára*, ha eltekintünk az ítélet hibájának előjelétől, akkor a két abszcissza féltengely összevonásával a megfelelő ordináták összegezhetők. Az így szuperponálva transzformált és $I=320$ biztonsági indexxel jellemezhető eloszlásfüggvényeket a *10. ábrán* tüntettük fel. A szuperponálást úgy végeztük el, hogy valamely ítélethibánál kisebb hibával rendelkező ítéletek valószínűségösszegében a zérus ítélethiba és a határként adott ítélethiba valószínűsége is bennfoglaltatik.

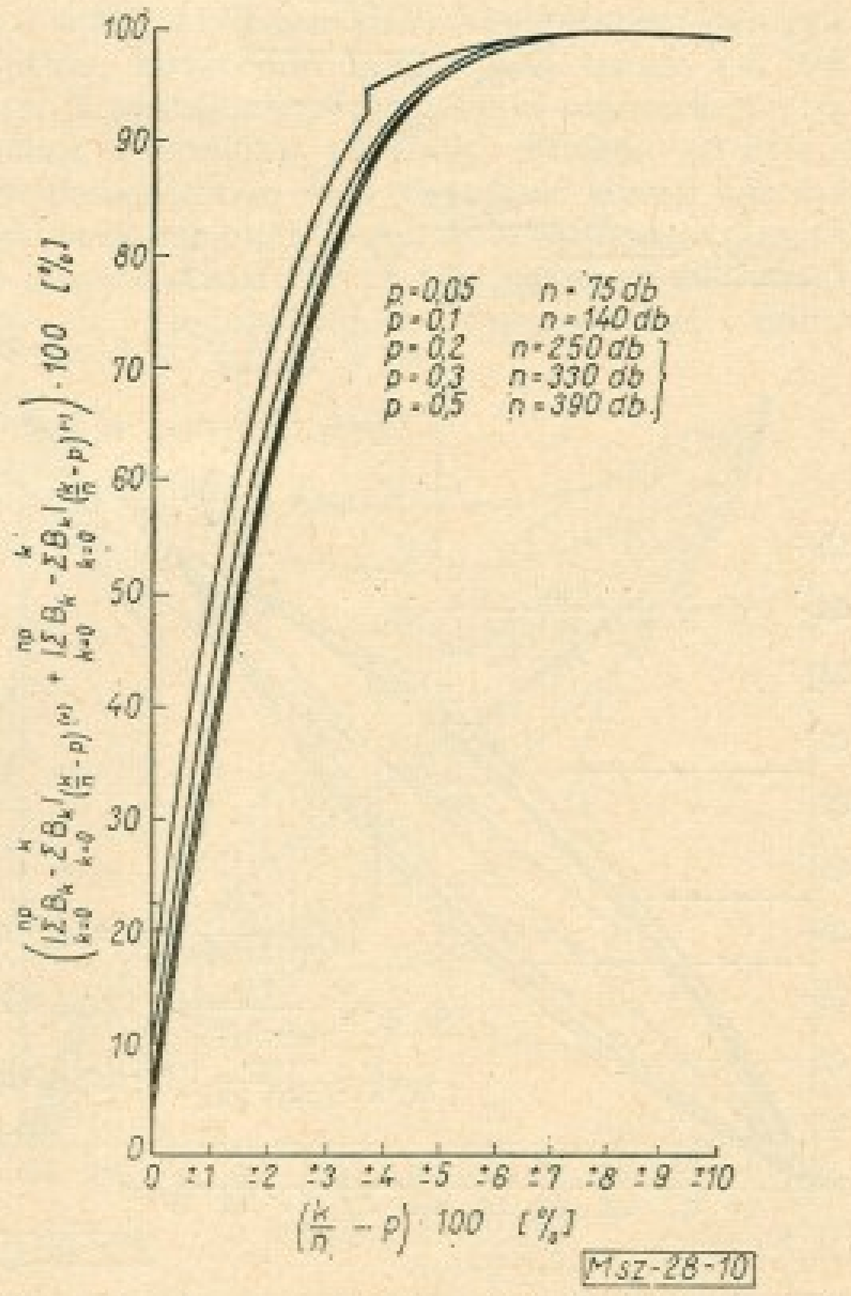
Megemlítjük, hogy a gyakoriság- és eloszlásfüggvények előállítását célzó, a valószínűségeket 10^{-5} pontossággal meghatározó számításaink egyetlen ellenőrzési lehetősége az $5\cdot10^{-6}<B_k$ valószínűségekhez tartozó $\Delta\ (k)$ tartomány felett vett eloszlásfüggvények

$$\varepsilon=1-\sum_{\Delta(k)}B_k$$

záróhibájának meghatározása volt. Az abszolút és egyben relatív záróhiba, amely az elhanyagolásból eredő pozitív előjelű biztos jellegű záróhiba és a műveletből és kerekítésből adódó pozitív, vagy negatív előjelű véletlen jellegű számítási záróhiba összege, számításaink során $-2\cdot10^{-5}<\varepsilon<+3{,}2\cdot10^{-4}$ értékeket vett fel.

Tömegarány vizsgálata

A fentiekben a p selejtarány — jelöljük ezután p_n-el — minden esetben selejtszámarányt jelentett, tehát a leírt törvényszerűségek és összefüggések



10. ábra. n-edrendű, p paraméterű binomiális valószínűségeloszlások szuperponálva transzformált eloszlásfüggvénye

kizárólag számarány vizsgálat esetén érvényesek. A gyakorlatban szokás a számarány helyett tömegarányban előírni a selejtarány kritikus értékét. Nézzük meg, hogy tömegarány vizsgálat során az eddigiek miként hasznosíthatók.

A szemcsehalmazt még azonos szemnagyság esetén is — a szemcsealaktól függő — különböző tömegű szemcsék alkotják. Ebből kifolyólag általában a p_n selejtszámarány nem azonos a p_m selejttömegaránnyal.

Az eddigiekben használt k és k/n osztású skálák mellé bevezetve az i/m és i skálákat, ahol i az m-tömegű mintában előforduló selejtes szemcsék tömege, megállapíthatjuk, hogy miképp a p_n érték a k/n skálán, úgy a p_m érték is az i/m skálán a várható érték — a gyakoriság skálák $k=n\cdot p_n$, illetve $i=m\cdot p_m$ — függőlegesén helyezkedik el. Nyilvánvaló ezenkívül, hogy a $k/n=0$ helyen $i/m=0$, és a $k/n=1$ helyen $i/m=1$. Ebből a három feltételből kiindulva, a közelítő megoldást

$$\frac{i}{m}=\frac{a\cdot\frac{k}{n}+b}{\frac{k}{n}+c}$$

hiperbola alakban keresve, összefüggést állapíthatunk meg a k/n relatív számgyakoriság és az i/m relatív tömeggyakoriság között. *(11. ábra)*. A második feltétel szerint $P\,(0\,;\,0)$, ebből $b=0$. A harmadik $P\,(1\,;\,1)$ feltételből $c=a-1$, tehát

$$\frac{i}{m}=\frac{a\cdot\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}+a-1}$$

Felhasználva az első $P(p_n; p_m)$ feltételt

$$p_m=\frac{a\cdot p_n}{p_n+a-1}$$

amiből

$$a=\frac{1-p_n}{1-\frac{p_n}{p_m}}$$

Ezt az i/m képletébe helyettesítve az eredmény

$$\frac{i}{m}=\frac{k}{n}\cdot\frac{1-p_n}{\frac{k}{n}\cdot\left(1-\frac{p_n}{p_m}\right)+\frac{p_n}{p_m}-p_n}$$

A feltételezett függvényalak és a megoldás helyessége az alábbiak szerint is belátható. Valamely p_n selejtszámarányú és p_m selejttömegarányú szemcsehalmazt reprezentáló n elemszámú és m tömegű, összetartozó $n\cdot p_n$ számgyakorisággal és $m\cdot p_m$ tömeggyakorisággal, mint várható értékkel jellemzett minta esetén az i/m relatív tömeggyakoriságot megkapjuk, ha a selejtes szemcsék k-szor vett átlagos fajlagos tömegét elosztjuk a selejtes szemcsék k-szor vett átlagos fajlagos tömegének és a nem selejtes szemcsék $(n-k)$-szor vett átlagos fajlagos tömegének összegével, azaz

$$\frac{i}{m}=\frac{k\cdot\frac{m\cdot p_m}{n\cdot p_n}}{k\cdot\frac{m\cdot p_m}{n\cdot p_n}+(n-k)\cdot\frac{m-m\cdot p_m}{n-n\cdot p_n}}$$

Egyszerű egyenletrendezés után

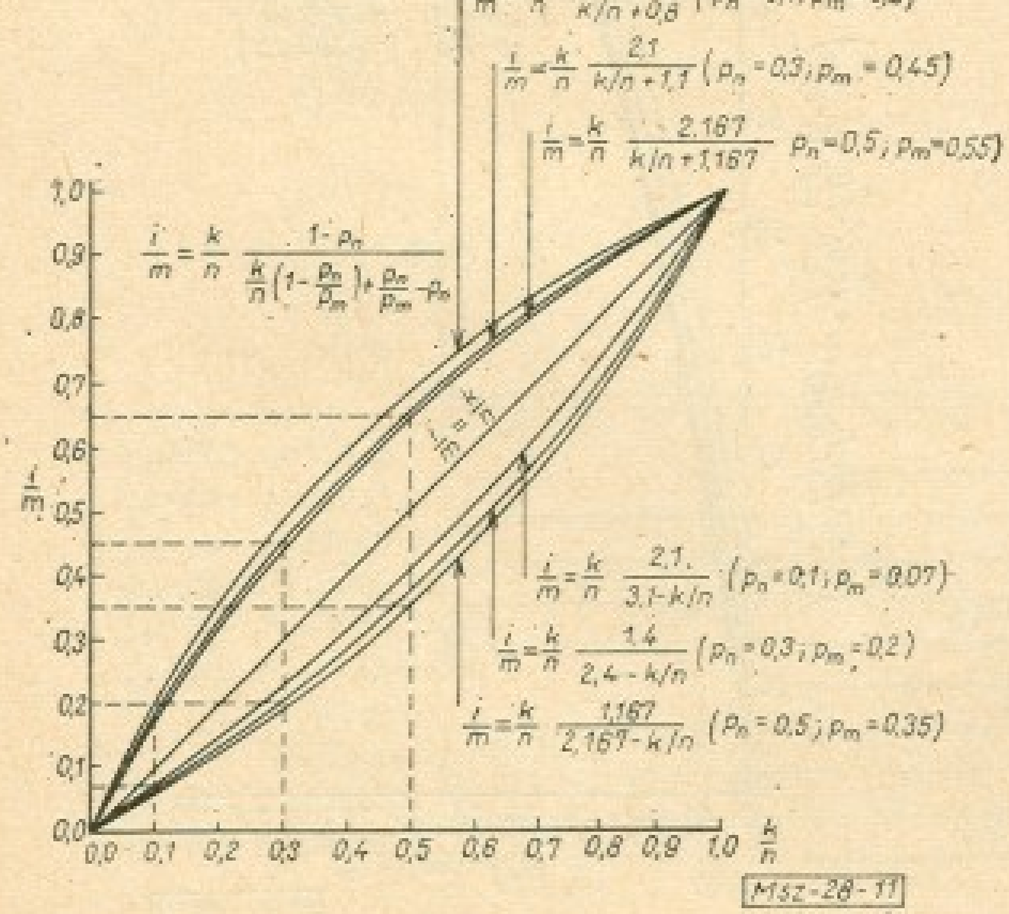
$$\frac{i}{m}=\frac{k}{n}\cdot\frac{1-p_n}{\frac{k}{n}\cdot\left(1-\frac{p_n}{p_m}\right)+\frac{p_n}{p_m}-p_n}$$

tehát az előbb kapott eredményre jutunk.

A megoldás közelítő jellege az átlagos fajlagos tömeggel való számolásban rejlik, és az i/m skála osztásainak szabályosságában jelentkezik. A gyakorlatban a mintára, vagy annak részére jellemző összetartozó p_n, p_m értékpár meghatározása többnyire nem feltétlenül azonosan megbízható egyszeri méréssel történik, ami szintén bizonyos pontatlanságot okozhat.

Az $i/m=f\,(k/n)$ hiperbola alulról nézve domború, vagy homorú aszerint, hogy $p_m<p_n$, vagy $p_m>p_n$. Abban a speciális esetben, ha $p_m=p_n$, akkor a hiperbola egyenessé fajul, és az $i/m=k/n$ összefüggésből kifolyólag a két relatív gyakoriság skála azonosan megegyezik *(11. ábra)*. Ebből következik, hogy azon megállapítás, amely szerint a számarány vizsgálatra kidolgozott összefüggések kizárólag számarány vizsgálat esetén érvényesek, módosításra szorul. Kiegészítésül meg kell jegyezni, hogy azonos selejtszám- és selejttömegarány esetén a számarány vizsgálat törvényszerűségei tömegarány vizsgálatra is fennállnak.

Az i/m képletében a k/n szorzója nem konstans, hanem maga is függvénye k/n-nek. A számarány vizsgálat során a k számgyakorisághoz tartozó szórásnégyzet standard összefüggéséből $1/n^2$-tel való szorzással közvetlenül megkaptuk a k/n rela-



11. ábra. Összefüggés a k/n relatív számgyakoriság és az i/m relatív tömeggyakoriság között, valamint a transzformált eloszlásfüggvények lényeges szakasza

tív számgyakorisághoz tartozó szórásnégyzet standard képletét, mert a k $1/n$-es konstans szorzója a k lineáris transzformációját jelentette. Ezzel szemben a k/n-hez tartozó szórás standard formulájából a k/n függvényszorzója okozta nem lineáris transzformáció miatt az i/m-hez tartozó szórás nem származtatható, ami egyben a standard összefüggés létezését tagadja.

A szórásnégyzet elemi úton határozható meg, amelyre a *4. ábra* értelemszerű alkalmazásával — $p=p_m$, $k/n=i/m$, $1/2n=\Delta/2=konstans$ helyettesítéssel — nyert

$$2\left[\sum_{\frac{i}{m}=0}^{p_m-\Delta}\left(p_m-\frac{i}{m}-\frac{\Delta}{2}\right)\cdot\Delta\cdot\sum_{k=0}^{k<np}B_k+\sum_{\frac{i}{m}=p_m}^{1}\left(\frac{i}{m}+\frac{\Delta}{2}-p_m\right)\cdot\Delta\cdot\left(1-\sum_{k=0}^{k\geqq np}B_k\right)\right],$$

ahol

$$\Delta=\Delta_i=\frac{i_{i+1}}{m}-\frac{i_i}{m};\quad \frac{i}{m}=f\left(\frac{k}{n}\right);\quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots n$$

kifejezés szolgál. A hosszadalmas és kényelmetlen numerikus számítás azonban az alábbi közelítés bevezetésével elkerülhető.

Mint a *9. ábrából* kitűnik, a transzformált eloszlásfüggvények a $k/n=p_n\pm 0{,}1$ szakaszon kívül eső valószínűségösszegei elhanyagolhatók. Ebből következik, hogy az $i/m=f\,(k/n)$ hiperbola terjedelme szintén a p_n környezetében levő és a *11. ábrán* feltüntetett szóbanforgó szakaszra korlátozható. Közelítésünk abban áll, hogy ezen szakaszon belül a görbét a hiperbola p_n pontjába húzott érintőjével helyettesítjük. Az érintő egyenlete lineáris kapcsolatot teremt a k/n és i/m változók között, ami lehetővé teszi az i/m relatív tömeggyakoriság közelítő standard szórásképletének felírását. A p_n pontbeli érintő iránya

$$\left(\frac{i}{m}\right)'=\frac{p_m\cdot q_m}{p_n\cdot q_n}$$

és a $P(p_n\,;\,p_m)$ ponton átmenő, $(i/m)'$ irányú egyenes egyenlete

$$\frac{i}{m}=\frac{p_m\cdot q_m}{p_n\cdot q_n}\cdot\frac{k}{n}+p_m\cdot\frac{p_m-p_n}{q_n}$$

Az összefüggésben a k/n relatív számgyakoriság $p_m\cdot q_m/p_n\cdot q_n$ szorzója a k/n-től független konstans érték. Ezért a k/n relatív számgyakoriság $\sigma^2/n^2=$ $=p_n\cdot q_n/n$ szórásnégyzetét megszorozva a $(p_m\cdot q_m/p_n\cdot q_n)^2$ mennyiséggel, az i/m relatív tömeggyakoriság szórásnégyzetének keresett, közelítő standard formuláját kapjuk

$$\frac{\sigma^2}{n^2}\cdot\frac{p_m^2\cdot q_m^2}{p_n^2\cdot q_n^2}=\frac{p_m^2\cdot q_m^2}{n\cdot p_n\cdot q_n}$$

Ezen szórásnégyzet $10^6/2$ arányossági tényezővel szorzott értéke a tömegarány vizsgálat biztonsági indexe

$$I_m=\frac{10^6}{2}\cdot\frac{p_m^2\cdot q_m^2}{n\cdot p_n\cdot q_n}$$

A tömegarány vizsgálat biztonsági indexe az alábbi képletek segítségével is meghatározható

$$I_m=I_n\cdot\frac{p_m^2\cdot q_m^2}{p_n^2\cdot q_n^2}=\frac{10^{12}}{4\cdot I_n}\cdot\frac{p_m^2\cdot q_m^2}{n^2}$$

Az $I_m=320$ biztonsági indexhez tartozó, az azonos biztonság elvén alapuló ítéletek tömegarány vizsgálatra mértékadó mintaelemszáma

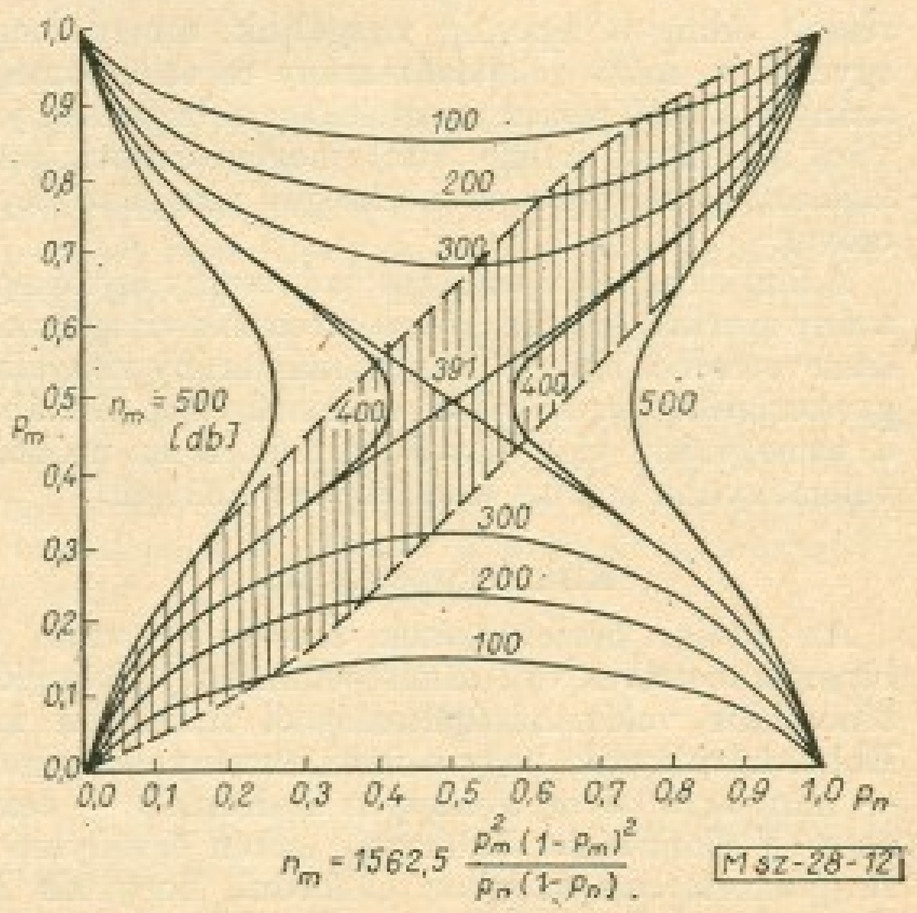
$$n_m=\frac{10^6}{2\cdot I_m}\cdot\frac{p_m^2\cdot q_m^2}{p_n\cdot q_n}=1562{,}5\cdot\frac{p_m^2\cdot q_m^2}{p_n\cdot q_n}\ [\text{db}]$$

A fenti képletekben, akárcsak a számarány vizsgálat képleteiben is, a q mennyiségek dimenziója *db*.

Az n_m összefüggés az egyparaméteres felületseregből a biztonsági index értékével konkretizált nyeregfelület képlete, amelyet az azonos minta elemszámok vonalai segítségével a *12. ábrán* mutatunk be. Ugyanezen ábrán tüntettük fel a valószínűleg előforduló p_n, p_m értékpárok tartományát.

A *3. táblázat* a *12. ábrabeli*, a jelentősebb p_n, p_m értékpárokhoz tartozó n_m mintaelemszámokat tartalmazza. A táblázatban a számarány vizsgálatra és egyben a $p_m=p_n$ esetre is mértékadó mintaelem számokat bekereteztük.

A *3. táblázat* felhasználásával elkészítettük a gyakorlatban követendő mintavételi tervet *(4. táblázat)*. A tömegarány vizsgálat a számarány vizsgálathoz hasonlóan történik. Eltérés csupán a mintaelemszámban és a vizsgálati lépcső két mérettel, a selejtszámaránnyal és selejttömegaránnyal való megadásában van. A kb. 500 szemcsét tartalmazó és megnyolcadolt reprezentatív minta



12. ábra. Összefüggés a p_n selejtszámarány, a p_m selejttömegarány és az n_m mintaelemszám között $I_m=320$ biztonsági index esetén, valamint a valószínűleg előforduló p_n, p_m értékpárok tartománya

A jelentősebb p_n selejtszámarány és p_m selejttömegarány értékekhez tartozó n_m mintaelemszámok $I_m=320$ biztonsági index esetén

3. táblázat

p_m / p_n	0,07	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,93
0,93																	52	74	102
0,90																80	99	141	194
0,85															135	159	199	282	390
0,80													176	190	213	250	314	444	
0,75												229	241	262	292	343	431		
0,70											278	287	303	328	368	431			
0,65										323	327	337	355	385	431	505			
0,60									364	360	364	375	396	429	480				
0,55								399	387	383	387	399	421	456					
0,50							429	407	395	391	395	407	427						
0,45						456	421	399	387	383	387	399							
0,40					480	429	396	375	364	360	364								
0,35				505	431	385	355	337	327	323									
0,30				431	368	328	303	287	278										
0,25			431	343	293	262	241	229											
0,20		444	314	250	213	190	176												
0,15	390	282	199	159	135														
0,10	194	141	99	80															
0,07	102	74	52																

Tömegarány vizsgálat mintavételi terve $I_m=320$ biztonsági index esetén

4. táblázat

p_n / p_o	0,07	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,93
0,93																	I.	II.	V.
0,90																II.	II.	IV.	VI.
0,85															IV.	IV.	IV.	V.	VII.
0,80													IV.	IV.	IV.	IV.	V.	VII.	
0,75												IV.	IV.	V.	V.	VI.	VII.		
0,70											V.	V.	V.	VI.	VI.	VII.			
0,65										VI.	VI.	VI.	VI.	VI.	VII.	VII.			
0,60									VI.	VI.	VI.	VI.	VII.	VII.	VIII.				
0,55								VII.	VII.	VII.	VII.	VII.	VII.	VII.					
0,50							VII.	VII.	VII.	VII.	VII.	VII.	VII.				Lépcső n_m (db)		
0,45						VIII.	VIII.	VII.	V	VII.	VII.	VII.					I.	625	
0,40					VIII.	VIII.	VII.	VI.	VI.	VI.	VI.						II.	125	
0,35				VIII.	VII.	VII.	VI.	VI.	VI.	VI.							III.	87,5	
0,30				VII.	VI.	VI.	V.	V.	V.								IV.	250	
0,25			VII.	VI.	V.	V.	IV.	IV.									V.	312,5	
0,20		VII.	V.	IV.	IV.	III.	III.										VI.	375	
0,15	VII.	V.	IV.	III.	III.												VII.	437,5	
0,10	III.	III.	II.	II.													VIII.	500	
0,07	II.	II.	I.																

részeit addig a lépcsőig vizsgáljuk, amely megegyezik a mért selejtszámarány és selejttömegarány a *3. táblázatnak* megfelelően a biztonság javára kerekített értéke által meghatározott, a *4. táblázatban* feltüntetett szükséges vizsgálati lépcsővel.

A fentiekben leírt szabatos, számarány és tömegarány szerinti minősítéses szemcsealak vizsgálatok összevetéséből kiderül, hogy a számarány vizsgálat gyakorlatilag egyszerűbb és elméletileg tisztább a tömegarány vizsgálatnál, amiért is az utóbbit véleményünk szerint lehetőleg kerülni kell.

Kishalmazos eljárás

Az eddigi összefüggések levezetése során a hipergeometrikus valószínűségeloszlást jól közelítő binomiális valószínűségeloszlásból indultunk ki. Ebből következik, hogy a fenti törvényszerűségek — mint arra bevezetésképpen utaltunk is — csak nagy N elemszámú halmazok esetén érvényesek. A gyakorlatban azonban előfordul, hogy kis N elemszámú halmazt kell szemcsealak szerint minősíteni. Ezért úgy gondoljuk nem lesz érdektelen a továbbiakban megvizsgálni, hogy az ismertetett nagyhalmazos eljárás kishalmazok esetén miként módosul, és mikor kell, vagy mikor célszerű a szemcsehalmazt kishalmazként kezelni.

A kishalmazos eljárás tárgyalásánál a hipergeometrikus valószínűségeloszláshoz kell visszatérni. A kis- és nagyhalmazos eljárás közötti kapcsolat a hipergeometrikus és binomiális valószínűségeloszlások szórásnégyzete kapcsolatában keresendő.

A hipergeometrikus valószínűségeloszlás szórásnégyzete a vele azonos rendű és paraméterű binomiális valószínűségeloszlás szórásnégyzetének $\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$-szerese [1], tehát

$$\sigma_h^2=\sigma_b^2\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)=npq\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)\ [\mathrm{db}^2]$$

ahol a h index a hipergeometrikus, a b index a binomiális valószínűségeloszlásra utal.

Ugyanez mondható a k/n relatív számgyakoriság és az i/m relatív tömeggyakoriság szórásnégyzetéről, és így a számarány és tömegarány vizsgálat biztonsági indexéről is, azaz

$$I_{hn}=I_{bn}\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)=\frac{10^6}{2}\,\frac{\sigma_h^2}{n^2}=$$

$$=\frac{10^6}{2}\,\frac{\sigma_b^2}{n^2}\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)=\frac{10^6}{2}\,\frac{p_n\cdot q_n}{n}\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$$

és

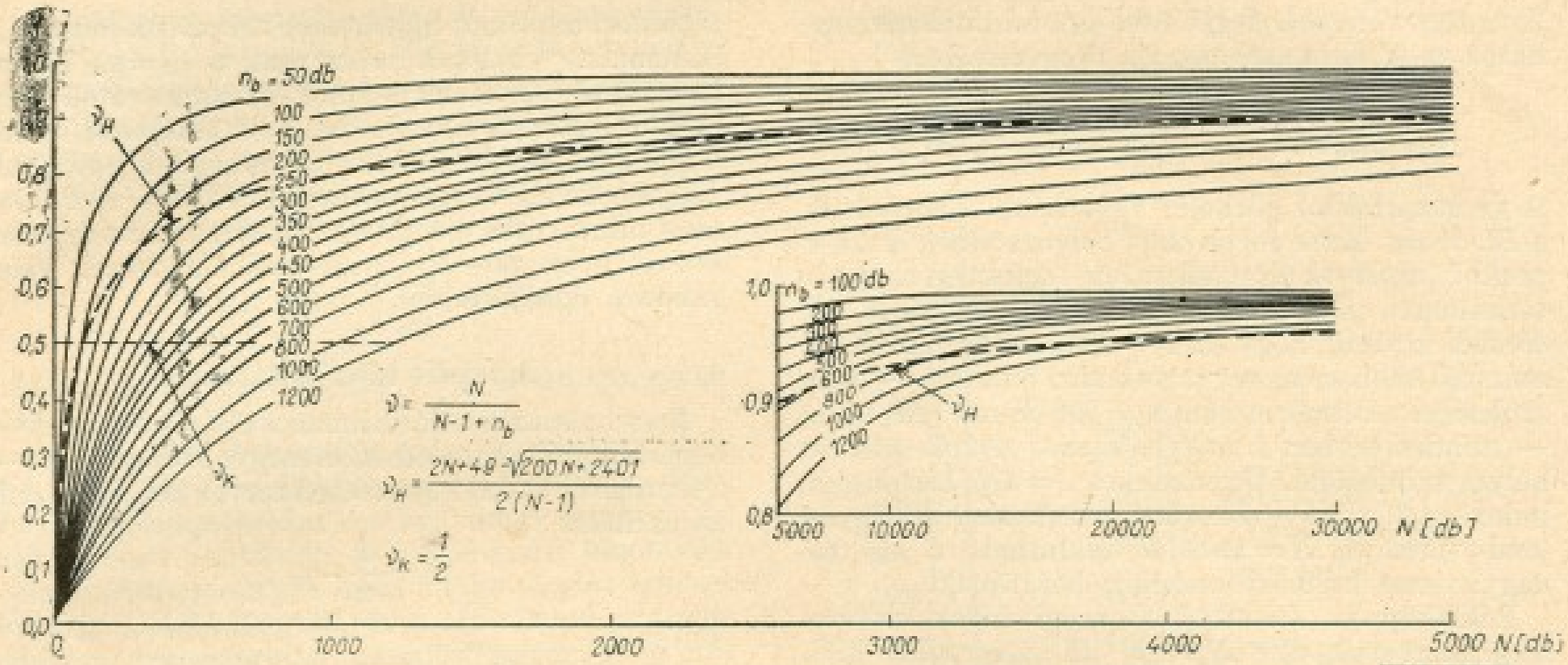
$$I_{hm}=I_{bm}\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)=\frac{10^6}{2}\cdot\frac{\sigma_h^2}{n^2}\cdot\frac{p_m^2\cdot q_m^2}{p_n^2\cdot q_n^2}=$$

$$=\frac{10^6}{2}\cdot\frac{\sigma_b^2}{n^2}\cdot\frac{p_m^2\cdot q_m^2}{p_n^2\cdot q_n^2}\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)=$$

$$=\frac{10^6}{2}\cdot\frac{p_m^2\cdot q_m^2}{n\cdot p_n\cdot q_n}\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$$

Nézzük meg, hogy valamely kishalmazból vett minta n_h elemszáma hányszor kisebb az ugyanolyan selejtarányú nagyhalmazhoz tartozó minta n_b elemszámánál akkor, ha a kishalmazos eljárás esetén is megelégszünk a biztonsági index akkora értékével, amekkorát nagyhalmazos eljárás esetén megköveteltünk. Legyen tehát a hipergeometrikus és binomiális valószínűségeloszlások rendszáma különböző, de egymástól nem független, paramétere, vagy megfelelő paraméterei egymással azonosak, relatív számgyakoriságának szórásnégyzete pedig egymással egyenlő. Ez utóbbit azért elegendő a relatív számgyakoriságra megkötni, mert a megfelelő paraméterek azonossága mellett teljesülése a feltétel relatív tömeggyakoriságra vonatkozó teljesülését is maga után vonja. Ugyanis a számarány vizsgálat $I_{hn}=I_{bn}$ feltételéből

$$I_{hn}=\frac{10^6}{2}\cdot\frac{\sigma_h^2}{n_h^2}=\frac{10^6}{2}\cdot\frac{\sigma_b^2}{n_b^2}=I_{bn}$$



Msz-28-13

13. ábra. Összefüggés az N halmazelemszám és a v faktor között különböző n_b mintaelemszámok esetén

és a tömegarány vizsgálat $I_{hm}=I_{bm}$ feltételéből

$$I_{hm}=\frac{10^6}{2}\cdot\frac{\sigma_h^2}{n_h^2}\cdot\frac{p_m^2\cdot q_m^2}{p_n^2\cdot q_n^2}=\frac{10^6}{2}\cdot\frac{\sigma_b^2}{n_b^2}\cdot\frac{p_m^2\cdot q_m^2}{p_n^2\cdot q_n^2}=I_{bm}$$

következik, és mindkettőből

$$\frac{\sigma_h^2}{n_h^2}=\frac{\sigma_b^2}{n_b^2}$$

Fejezzük ki ebből n_h-t az n_b és N segítségével

$$\frac{n_h^2}{n_b^2}=\frac{\sigma_h^2}{\sigma_b^2}=\frac{n_h\cdot p_n\cdot q_n\cdot\left(1-\frac{n_h-1}{N-1}\right)}{n_b\cdot p_n\cdot q_n}$$

amiből

$$\frac{n_h}{n_b}=1-\frac{n_h-1}{N-1}$$

és végül

$$n_h=\frac{N}{N-1+n_b}\,n_b\ \text{[db]}$$

Ez az összefüggés számarány és tömegarány vizsgálat esetén egyaránt érvényes, csak n alatt számarány vizsgálat során n_n, tömegarány vizsgálat során n_m értendő.

Ha bevezetjük a

$$v=\frac{N}{N-1+n_b}$$

jelölést, akkor

$$n_h=v\cdot n_b\quad\text{[db]}$$

Minthogy $N\leqq N-1+n_b$ következik, hogy $v\leqq 1$ és $n_h\leqq n_b$. Adott n_b mellett, ha $N\to\infty$, akkor $v\to 1$ és $n_h\to n_b$. Továbbá $n_b<N-1+n_b$, amiből

$$\frac{n_b}{N-1+n}<1$$

és $n_h<N$.

Kishalmazos eljárás esetén tehát a biztonsági index növekedése nélkül a nagyhalmazos eljárás szükséges n_b mintaelemszáma n_h-ra csökkenthető. A különböző, a *3. táblázat* tartományába eső n_b=*50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450 és 500 db* mintaelemszámokhoz tartozó v faktorok görbéit az N halmazelemszám függvényében a *13. ábrán* tüntettük fel. Az ábra többi részéről a későbbiekben szólunk.

Valamely n_b mintaelemszámmal jellemzett v görbéhez a biztonsági index függvényében hozzárendelhető a p_n, vagy p_n és p_m selejtarány, és így a v görbe a szóban forgó biztonsági index egyidejű megadása mellett a selejtaránnyal is jellemezhető.

A nagyhalmazos eljárás értelmezhetőségének feltétele, hogy a halmaz legalább annyi szemcsét tartalmazzon, amennyi a minta szükséges elemszáma. Ez a feltétel a v_K kritérium faktort eredményezi, amelynek értéke jó közelítéssel $v_K=0{,}5$. Ugyanis $N=n_b$ és

$$v=\frac{N}{N-1+n_b},$$

ebből

$$v_K=\frac{N}{2N-1}\cong\frac{1}{2}$$

Azon minősítések során tehát, amelyekhez tartozó ábrázoló pontok a *13. ábrán* feltüntetett v_K kritériumvonal alá esnek, nagyhalmazos eljárásról beszélni nem lehet, és hacsak nem törekszünk a különben adottnál kisebb biztonsági index elérésére, akkor a minősítést a kishalmazos eljárás módszere szerint kell végeznünk.

Véleményünk szerint a kishalmazos eljárás csak akkor előnyös a nagyhalmazossal szemben, ha alkalmazásával legalább 50 db szemcse vizsgálata megtakarítható. Ebből a feltételből felírható a v faktor v_H határértéke

$$n_h=n_b-50\ \text{és}\ n_h=v\cdot n_b$$

amiből

$$v_H=\frac{n_b-50}{n_b}=1-\frac{50}{n_b}$$

A v_H értéke kifejezhető az N halmazelemszám segítségével is

$$v_H=\frac{2N+49-\sqrt{200N+2401}}{2\cdot(N-1)}$$

A v_H függvénynek eleget tevő n_{bH} mintaelemszám-határ az N halmazelemszám függvényében

$$n_{bH}=\frac{51+\sqrt{200N+2401}}{2}\ [\text{db}]$$

A v_H határfaktor görbéjét ugyancsak feltüntettük a *13. ábrán*. Ezen görbe alatt helyezkednek el azon pontok, amelyek által jellemzett esetekben a szemcsehalmazt célszerű kishalmazként kezelni. A *13. ábrából* kitűnik, hogy az $N=4500$ *db* halmazelemszámnál több szemcsét tartalmazó halmazt — ha a szükséges mintaelemszám $n_b=500$ *db*-nál nem több — mindenesetben a nagyhalmazos eljárás szerint helyes minősíteni. Ugyanakkor $I=320$ biztonsági index mellett a gyakorlati selejtarányok figyelembevételével $N=1000$ *db* tekinthető a kis- és nagyhalmaz halmazelemszáma határának.

Példaképpen $I=320$ biztonsági index esetére meghatároztuk egy $N=200$ *db* szemcséből álló halmaz selejtarány vizsgálatának mintaelemszámait *(5. táblázat)*, valamint összeállítottuk annak számarány és tömegarány vizsgálatra egyaránt

A jelentősebb p_n selejtszámarány és p_m selejttömegarány értékekhez tartozó n_b mintaelemszámok $N=200$ db halmazelemszám és $I=320$ biztonsági index esetén

5. táblázat

p_n \ ε_n	0,07	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,93
0,93																	41	54	68
0,90																57	66	83	99
0,85															81	89	100	118	133
0,80													94	98	104	111	124	138	
0,75												107	110	114	119	127	137		
0,70											117	118	121	124	130	137			
0,65										124	125	126	128	132	137	144			
0,60									129	129	129	131	133	137	142				
0,55								134	132	132	132	134	136	139					
0,50							137	135	133	133	133	135	137						
0,45						139	136	134	132	132	132	134							
0,40					142	137	133	131	129	129	129								
0,35				144	137	132	128	126	125	124									
0,30			137	130	124	121	118	117											
0,25		138	127	119	114	110	107												
0,20	133	118	111	104	98	94													
0,15	99	83	66	57															
0,10	68	54	47																
0,07																			

Általános mintavételi terv $N=200$ db halmazelemszám és $I=320$ biztonsági index esetén

6. táblázat

p_n \ ε_n	0,07	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,93
0,93																	I.	II.	II.
0,90																II.	II.	II.	II.
0,85															II.	II.	II.	III.	III.
0,80													II.	II.	III.	III.	III.	IV.	
0,75												III.	III.	III.	III.	III.	IV.		
0,70											III.	III.	III.	III.	III.	IV.			
0,65										IV.	IV.	IV.	IV.	IV.	IV.				
0,60									III.	III.	III.	IV.	IV.	IV.	IV.				
0,55								IV.	IV.	IV.	III.	III.	IV.	IV.					
0,50							III.	III.	III.	III.	III.	III.	IV.						
0,45						III.	III.	III.	III.	III.	III.	III.							
0,40					III.	III.	III.	III.	III.	III.	III.								
0,35				III.	III.	III.	III.	III.	III.	III.									
0,30				III.	III.	III.	III.	III.	III.										
0,25			III.	III.	III.	III.	III.	III.											
0,20		III.	III.	III.	III.	II.	II.												
0,15	III.	III.	II.	II.	II.														
0,10	II.	II.	II.	II.															
0,07	II.	II.	I.																

Lépcső	n_{nbs} (db)
I.	50
II.	100
III.	150
IV.	200

A vizsgálatra kerülő szemcsehalmaz 200 szemcséjéből legfeljebb 150 *db*-ot kell vizsgálat tárgyává tenni. A *6. táblázat* mintavételi tervét a szemcsehalmaz negyedelésével nyert 50—50 szemcséből álló részek vizsgálatára építettük fel.

A relatív hiba korlátozása

Nagyhalmazos és kishalmazos eljárás esetén is — a mértékadó mintaelemszám megváltozása miatt — a fentiektől eltérő mintavételi tervet kell készíteni, ha az ítélet

$$\varepsilon_n=\frac{k}{n}-p_n\ ,$$

illetve

$$\varepsilon_m=\frac{i}{m}-p_m$$

abszolút hibája helyett, annak $\delta_n=\varepsilon_n/p_n$, illetve $\delta_m=\varepsilon_m/p_m$ relatív hibáját kívánjuk korlátozni.

Nézzük először a nagyhalmazos eljárást. Elsődleges célunk a számarány vizsgálat

$$\delta_n=\frac{\varepsilon_n}{p_n}=\left(\frac{k}{n}-p_n\right)\cdot\frac{1}{p_n}=\frac{k}{n\cdot p_n}-1$$

relatív hibája szórásnégyzetének meghatározása-amelynek értéke azonos a $k/n\cdot p_n$ számgyakoriságtényező szórásnégyzetének értékével. Az $n\cdot p_n$ szorzat a k számgyakoriság várható értéke. A számgyakoriságtényező szórásnégyzete a számgyakoriság σ^2 szórásnégyzetének $1/n^2\cdot p_n^2$-szerese, illetve a relatív számgyakoriság σ^2/n^2 szórásnégyzetének $1/p_n^2$-szerese, tehát

$$\frac{\sigma^2}{n^2\cdot p_n^2}=\frac{n\cdot p_n\cdot q_n}{n^2\cdot p_n^2}=\frac{q_n}{n\cdot p_n}$$

Ebből a relatív hiba biztonsági indexe

$$I_{nb\delta}=\frac{I_{nbs}}{p_n^2}=\frac{10^6}{2}\cdot\frac{q_n}{n\cdot p_n}=\frac{10^6}{2}\cdot\frac{1-p_n}{n\cdot p_n}$$

és a számarány vizsgálat relatív hibára mértékadó mintaelemszáma

$$n_{nb\delta}=\frac{10^6}{2I_{nb\delta}}\cdot\frac{q_n}{p_n}=\frac{10^6}{2I_{nb\delta}}\cdot\frac{1-p_n}{p_n}\ [\text{db}]$$

Ez egy, a nem negatív $n_{nb\delta}$ és $0\leq p_n\leq 1$ értékekre értelmezett egyparaméteres hiperbolasereg egyenlete, amely az egyenlőoldalú hiperbola

$$n_{nb\delta}=\frac{a_1\cdot p_n+b_1}{a_2\cdot p_n+b_2}$$

általános egyenletéből az $a_1=-10^6/2\cdot I_{nb\delta}$, $b_1=10^6/2\cdot I_{nb\delta}$, $a_2=1$, $b_2=0$ feltételekkel állítható elő.

Az abszolút és relatív hiba szerinti mértékadó mintaelemszámok és biztonsági indexek között számarány vizsgálat esetén az alábbi kapcsolat áll fenn

$$\frac{n_{nb\delta}}{n_{nbs}}=\frac{I_{nbs}}{I_{nb\delta}}\cdot\frac{1}{p_n^2}$$

A szükséges mintaelemszámok meghatározásához újból a *0,2 paraméterű, 250-edrendű* binomiális valószínűségeloszlást választjuk bázisfüggvénynek, amely körülmény $I_\delta = 8000$ értékben határozza meg a relatív hiba mértékadó biztonsági indexének nagyságát. Minthogy ezzel $a_1 = -62{,}5$ és $b_1 = 62{,}5$, az $n_{nb\delta}$ mintaelemszám egyenlete az

$$n_{nb\delta} = 62{,}5 \cdot \frac{1 - p_n}{p_n} \text{ [db]}$$

képet ölti. Az összefüggést a *14. ábrán* tüntettük fel.

Az $I_\delta = 8000$ biztonsági index a $p = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}8$ selejtarány értékekhez az $n = 563 \simeq 560$; 250 ; 16 mintaelemszámokat rendeli, amely értékpárokhoz tartozó n-edrendű, p paraméterű binomiális valószínűségeloszlások relatív hiba szerint transzformált eloszlásfüggvényét a *15. ábrán*, szuperponálva transzformált eloszlásfüggvényét a *16. ábrán* ábrázoltuk. Az eloszlásfüggvények számítása abszolút és egyben relatív záróhibájának határértéke $-4 \cdot 10^{-5} < \varepsilon < +2{,}5 \cdot 10^{-4}$ volt.

Tömegarány vizsgálat esetén a

$$\delta_m = \frac{\varepsilon_m}{p_m} = \left(\frac{i}{m} - p_m\right) \cdot \frac{1}{p_m} = \frac{i}{m \cdot p_m} - 1$$

relatív hiba biztonsági indexét például a relatív tömeggyakoriság

$$\frac{\sigma^2}{n^2} \cdot \frac{p_m^2 \cdot q_m^2}{p_n^2 \cdot q_n^2}$$

szórásnégyzete segítségével határozhatjuk meg. Az $i/m \cdot p_m$ tömeggyakoriság-tényező szórásnégyzete egyenlő a relatív tömeggyakoriság szórásnégyzetének $1/p_m^2$-szeresével, azaz

$$\frac{\sigma^2}{n^2} \cdot \frac{p_m^2 \cdot q_m^2}{p_n^2 \cdot q_n^2} \cdot \frac{1}{p_m^2} = \frac{q_m^2}{n \cdot p_n \cdot q_n}$$

Így a relatív hiba biztonsági indexe

$$I_{mb\delta} = \frac{I_{mb\varepsilon}}{p_m^2} = \frac{10^6}{2} \cdot \frac{q_m^2}{n \cdot p_n \cdot q_n} = \frac{10^6}{2} \cdot \frac{(1 - p_m)^2}{n \cdot p_n \cdot (1 - p_n)}$$

és

$$I_{mb\delta} = I_{nb\delta} \cdot \frac{q_m^2}{q_n^2} = \frac{10^{12}}{4 \cdot I_{nb\delta}} \cdot \frac{q_m^2}{n^2 \cdot p_n^2}$$

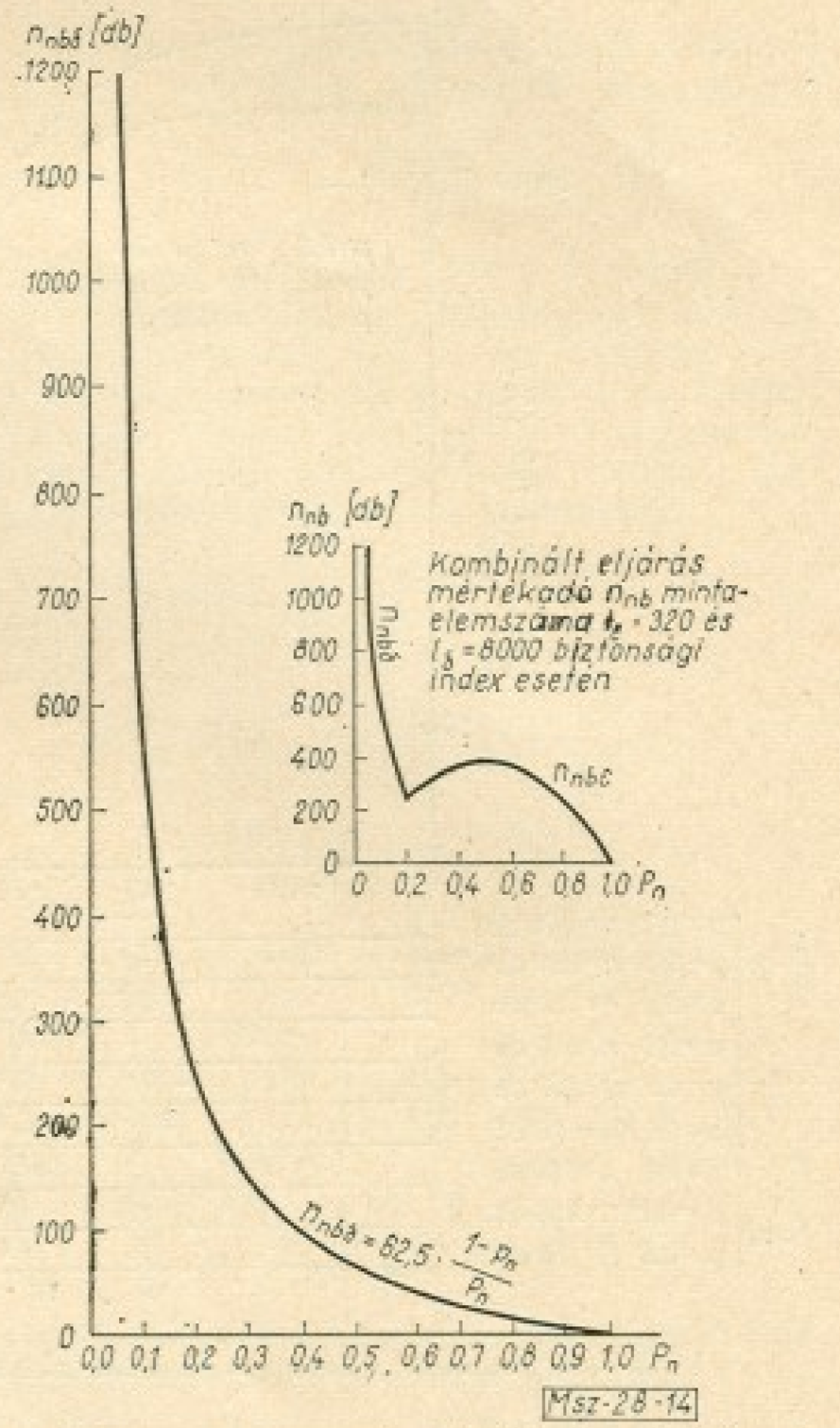
Azonos mintaelemszám esetén a biztonsági indexek között az alábbi összefüggés áll fenn

$$\frac{I_{nb\varepsilon}}{I_{mb\varepsilon}} = \frac{p_n^2}{p_m^2} \cdot \frac{I_{nb\delta}}{I_{mb\delta}}$$

A tömegarány vizsgálat relatív hibára mértékadó mintaelemszáma

$$n_{mb\delta} = \frac{10^6}{2 \cdot I_{mb\delta}} \cdot \frac{q_m^2}{p_n \cdot q_n} = \frac{10^6}{2 \cdot I_{mb\delta}} \cdot \frac{(1 - p_m)^2}{p_n \cdot (1 - p_n)} \text{ [db]}$$

Ezen összefüggés $0 \leq p_n \leq 1$ és $0 \leq p_m \leq 1$ határok között értelmezett elliptikus tulajdonságú egyparaméteres felületsereg egyenlete. A felület p_n normálisú síkmetszetei másodfokú parabolákat, p_m normálisú síkmetszetei harmadrendű, racionális törtfüggvénygörbéket, és $n_{mb\delta}$ normálisú síkmetszetei ellipsziseket adnak. Ez utóbbiak — az azonos mintaelemszámok vonalai — felhasználásával ábrázoltuk az $I_\delta = 8000$ biztonsági index által meghatározott felületet *(17. ábra)*, amelynek egyenlete



14. ábra. Összefüggés a p_n selejtszámarány és az $n_{nb\delta}$ mintaelemszám között $I_\delta = 8000$ biztonsági index esetén

$$n_{mb\delta} = 62{,}5 \cdot \frac{(1 - p_m)^2}{p_n \cdot (1 - p_n)} \text{ [db]}$$

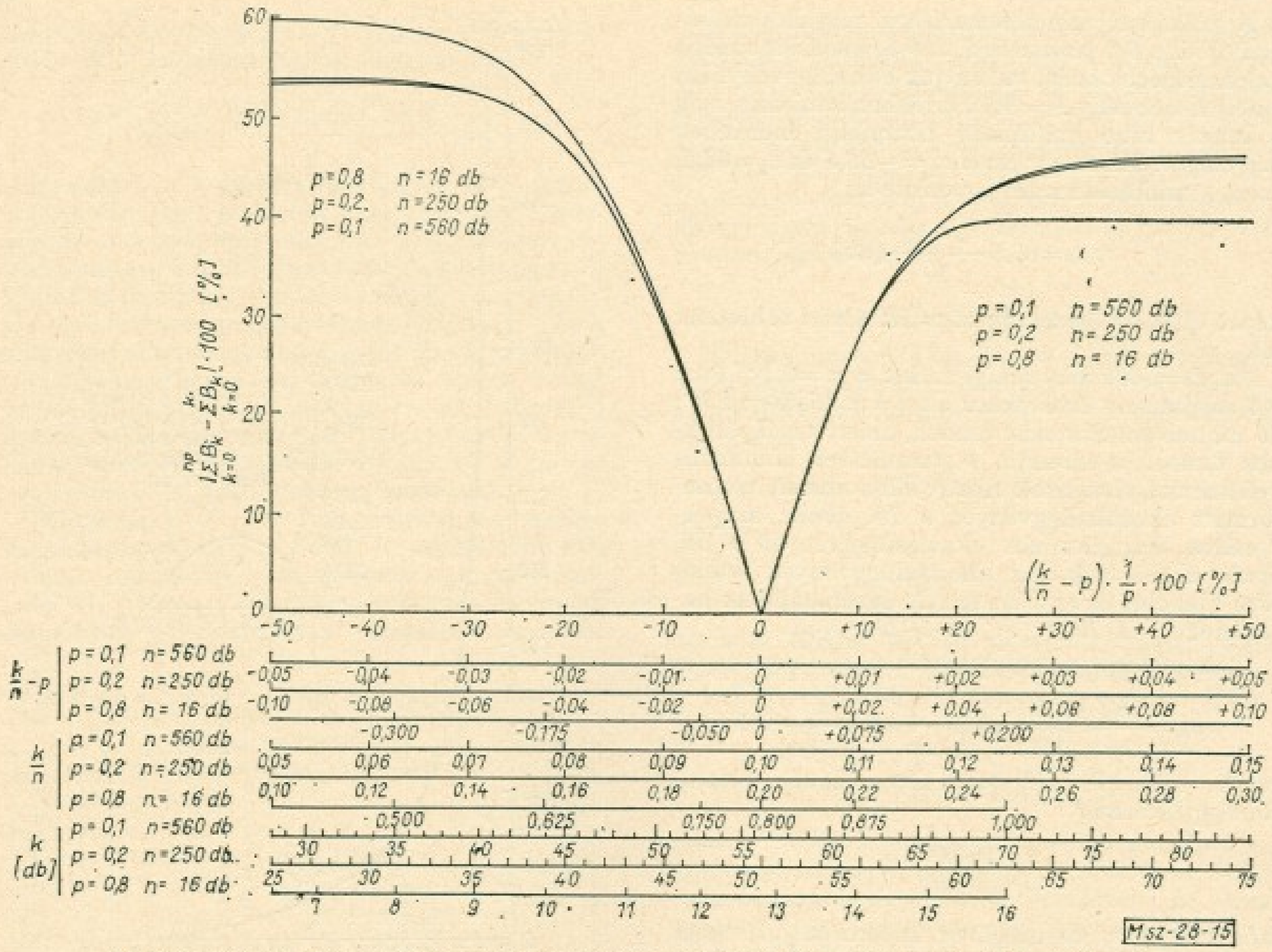
Az abszolút és relatív hiba szerinti mértékadó mintaelemszámok és biztonsági indexek közötti összefüggés tömegarány vizsgálat során

$$\frac{n_{mb\delta}}{n_{mb\varepsilon}} = \frac{1}{p_m^2} \cdot \frac{I_{mb\varepsilon}}{I_{mb\delta}}$$

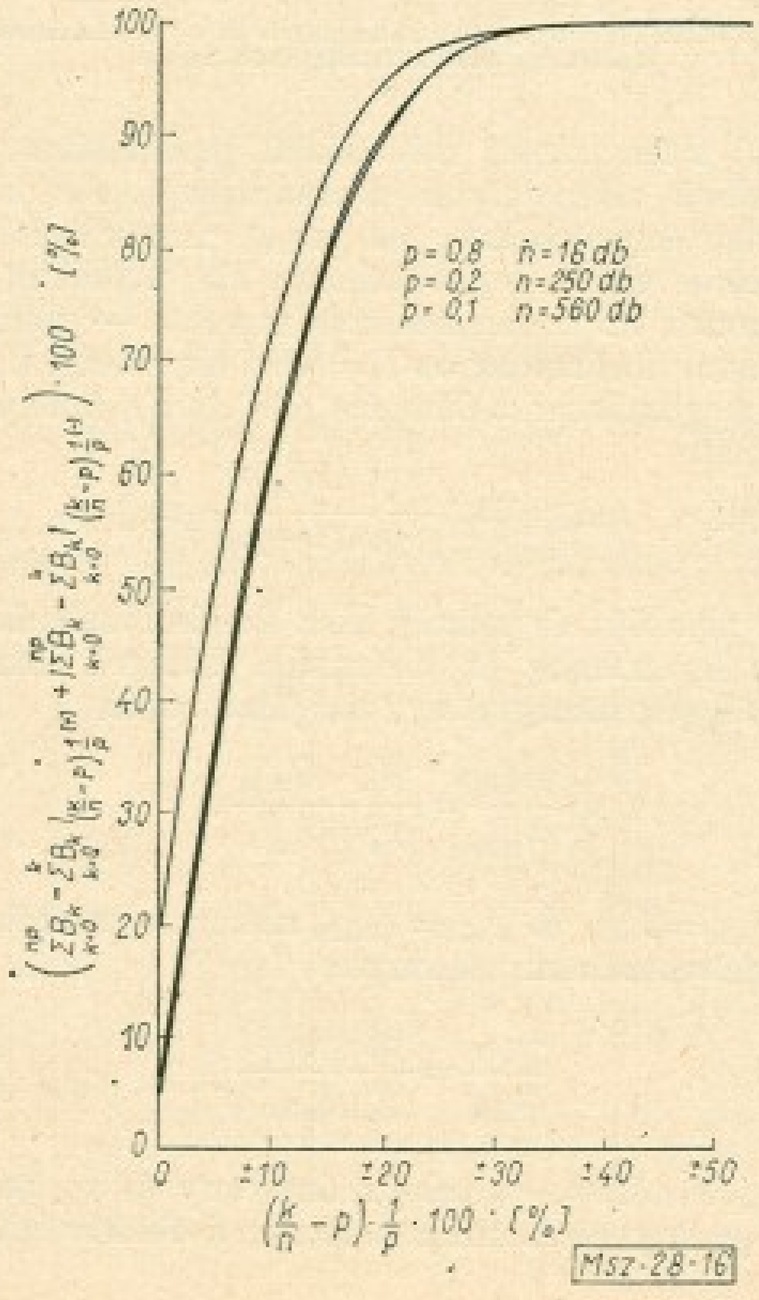
Ha $I_{nb\varepsilon} = I_{mb\varepsilon}$ és $I_{nb\delta} = I_{mb\delta}$, akkor a mértékadó mintaelemszámok viszonya

$$\frac{n_{nb\varepsilon}}{n_{mb\varepsilon}} = \frac{p_n^2}{p_m^2} \cdot \frac{n_{nb\delta}}{n_{mb\delta}}$$

A jelentősebb p_n selejtszámarány és p_m selejttömegarány értékekhez tartozó, a relatív hibára



15. ábra. *n*-edrendű, *p* paraméterű binomiális valószínűségeloszlások relatív hiba szerint transzformált eloszlásfüggvénye

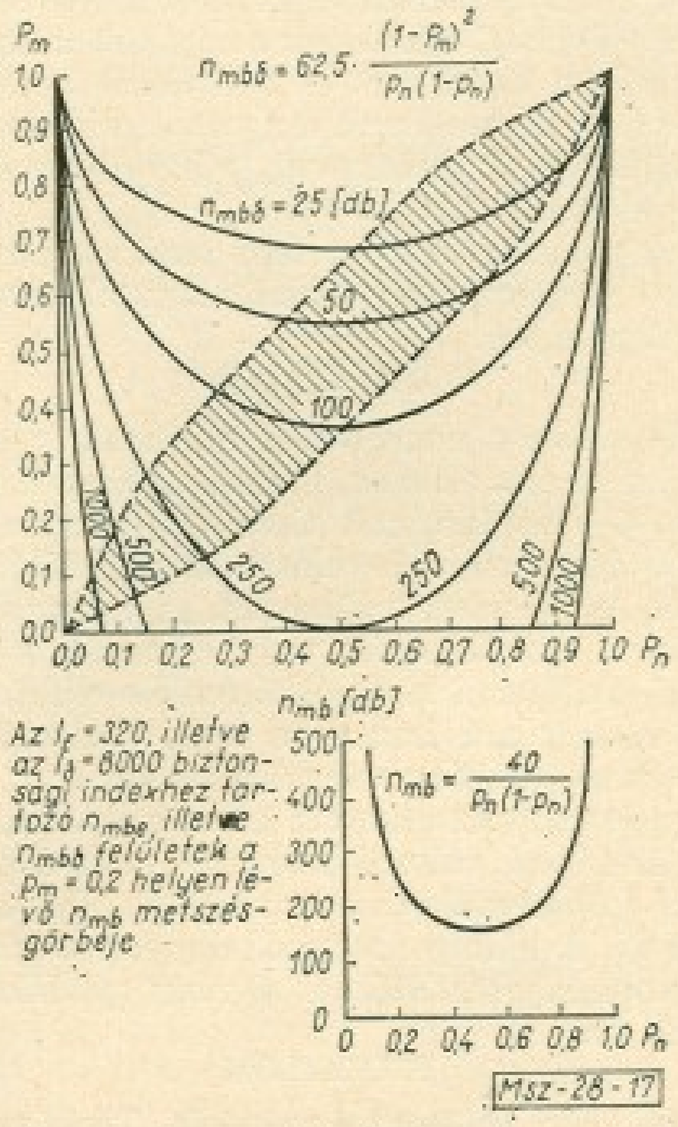


mértékadó n_{bs} mintaelemszámokat $I_s=8000$ biztonsági index mellett a *7. táblázatban* tüntettük fel. A számarány vizsgálat mintaelemszámai a $p_n=p_m$ helyeken találhatók. Konkrét mintavételi tervet a relatív hiba szerinti nagyhalmazos szemcsealak vizsgálatra nem dolgoztunk ki, mert a mértékadó mintaelemszámok, a kis selejtarányok környezetében való rohamos növekedése miatt, azt ésszerűbb a szemcsehalmaz szemrevételezése után esetenként, csak egy szűkebb p_n-p_m tartományra elkészíteni.

Megemlítjük, hogy elképzelhető egy olyan kombinált minősítéses szemcsealak vizsgálat, amely egyaránt törekszik az abszolút és relatív hiba korlátozására. A felvett biztonsági indexek segítségével meghatározott n_s és n_δ mintaelemszámok közül a kombinált eljárásra nézve valamely p helyen a nagyobbik tekinthető mértékadónak.

Így például $I_s=320$ és $I_\delta=8000$ biztonsági indexekkel jellemzett kombinált számarány vizsgálat, a *14. ábrán* feltüntetett mértékadó mintaelemszámának görbéje a *8.* és *14. ábrák* függvényének kombinációjából áll elő. A $0\leq p_n\leq 0{,}2$ szakaszon a relatív hiba szerinti n_{nbs}, a $0{,}2\leq p_n\leq 1{,}0$ szakaszon az abszolút hiba szerinti n_{nbs} görbe érvényes. A megadott biztonsági szinten az első szakasz mintaelemszáma az abszolút hiba szem-

16. ábra. *n*-edrendű, *p* paraméterű binomiális valószínűségeloszlások relatív hiba szerint szuperponálva transzformált eloszlásfüggvénye



17. ábra. Összefüggés a p_n selejtszámarány, a p_m selejttömegarány és az $n_{mbδ}$ mintaelemszám között $I_δ = 8000$ biztonsági index esetén, valamint a valószínűleg előforduló p_n, p_m értékpárok tartománya

pontjából túlzott, de a relatív hiba szempontjából szükséges, a második szakasz mintaelemszáma pedig a relatív hiba szempontjából túlzott, de az abszolút hiba szempontjából szükséges. A két görbe szakasz a $p_n = 0,2$ pontban metsződik, amelyhez tartozó mintaelemszám az abszolút és a relatív hiba szempontjából egyaránt szükséges.

Kombinált tömegarány vizsgálat esetén a kombinált számarány vizsgálat utóbb említett görbeszakaszainak szerepét a felületrészek, a görbék metszéspontjának szerepét a felületek metszésvonala veszi át. Az $I_ε = 320$ és $I_δ = 8000$ biztonsági indexek *12.* és *17. ábrabeli* mintaelemszámfelületei a $p_m = 0,2$ síkban fekvő görbében metsződnek, ahol is $n_{mbε} = n_{mbδ}$. A *17. ábrán* feltüntetett metszésgörbe egyenlete

$$n_{mb} = \frac{40}{p_n \cdot (1-p_n)} \text{ [db]}$$

A $0 \leq p_m \leq 0,2$ tartomány felett a relatív hiba szerinti $n_{mbδ}$, a $0,2 \leq p_m \leq 1$ tartomány felett az abszolút hiba szerinti $n_{mbε}$ felület érvényes.

A fentiek ismeretében a relatív hiba szerinti kishalmazos eljárás összefüggései is egyszerűen felírhatók. Azonos mintaelemszám mellett a biztonsági indexek kifejezései a következők

$$I_{nbδ} = I_{nbδ} \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) = \frac{I_{nbε}}{p_n^2} =$$

$$= \frac{I_{nbε}}{p_n^2} \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) = I_{mbδ} \cdot \frac{q_n^2}{q_m^2} =$$

$$= \frac{10^6}{2} \cdot \frac{q_n}{n \cdot p_n} \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

$$I_{mbδ} = I_{mbδ} \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) = \frac{I_{mbε}}{p_m^2} =$$

$$= \frac{I_{mbε}}{p_m^2} \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) = I_{nbδ} \cdot \frac{q_m^2}{q_n^2} =$$

$$= \frac{10^6}{2} \cdot \frac{q_m^2}{n \cdot p_n \cdot q_n} \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

A mértékadó mintaelemszámok összefüggései valamely megbízhatósági szinten az alábbiak

$$n_{nbδ} = n_{nbδ} \cdot v_{nbδ} = n_{nbε} \cdot \frac{v_{nbδ}}{v_{nbε}} \cdot \frac{I_ε}{I_δ} \cdot \frac{1}{p_n^2} =$$

$$= n_{nbε} \cdot v_{nbδ} \cdot \frac{I_ε}{I_δ} \cdot \frac{1}{p_n^2} = n_{mbδ} \cdot \frac{v_{nbδ}}{v_{mbδ}} \cdot \frac{q_n^2}{q_m^2} \text{ [db]}$$

$$n_{mbδ} = n_{mbδ} \cdot v_{mbδ} = n_{mbε} \cdot \frac{v_{mbδ}}{v_{mbε}} \cdot \frac{I_ε}{I_δ} \cdot \frac{1}{p_m^2} =$$

$$= n_{mbε} \cdot v_{mbδ} \cdot \frac{I_ε}{I_δ} \cdot \frac{1}{p_m^2} = n_{nbδ} \cdot \frac{v_{mbδ}}{v_{nbδ}} \cdot \frac{q_m^2}{q_n^2} \text{ [db]}$$

ahol például

$$v_{nbδ} = \frac{N}{N-1+n_{nbδ}} = \frac{N-n_{nbδ}}{N-1}$$

és így tovább.

A jelentősebb p_0 selejtszámarány és p_m selejttömegarány értékekhez tartozó $n_{bδ}$ mintaelemszámok $I_δ = 8000$ biztonsági index esetén

7. táblázat

p_m \ p_0	0,05	0,07	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90
0,90																	4	5	7
0,85																8	9	12	16
0,80														11	12	14	16	20	28
0,75													17	18	19	21	25	31	
0,70												23	24	25	27	31	35		
0,65											31	31	32	34	37	41	48		
0,60										41	40	41	42	44	48	54			
0,55									53	52	51	52	53	56	61				
0,50								69	66	64	63	64	66	69					
0,45							91	84	79	77	76	77	79						
0,40						120	108	99	94	91	90	91							
0,35					165	141	126	116	111	107	106								
0,30					192	164	148	135	128	124									
0,25				276	220	188	168	155	147										
0,20			444	314	250	213	190	176											
0,15		694	502	354	283	241													
0,10	1068	776	564	396	320														
0,07	1142	803	604	425															
0,05	1200	880	640																

A jelentősebb p_0 selejtszámarány és p_m selejttömegarány értékekhez tartozó $n_{bδ}$ mintaelemszámok $N = 200$ db halmazelemszám és $I_δ = 8000$ biztonsági index esetén

8. táblázat

p_m \ p_0	0,05	0,07	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
0,35					91	83	78	74	72
0,30					99	91	85	81	79
0,25				117	106	98	92	88	85
0,20			138	124	111	104	98	94	
0,15		156	144	129	118	110			
0,10	169	160	148	134	124				
0,07	171	162	151	137					
0,05	172	164	153						

Általános mintavételi terv $N=200$ db halmazelemszám és $I_\delta=8000$ biztonsági index esetén

9. táblázat

p_{δ} \ ϱ_{δ}	0,05	0,07	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
					II.	II.	II.	II.	II.
					II.	II.	II.	II.	II.
				III.	III.	II.	II.	II.	II.
			III.	III.	III.	III.	II.	II.	
		IV.	III.	III.	III.	III.			
	IV.	IV.	III.	III.	III.				
	IV.	IV.	IV.	III.					
	IV.	IV.	IV.						

Lépcső	n (db)
I.	50
II.	100
III.	150
IV.	200

A *13. ábrát* kiegészítettük néhány, az $n_b=500$ *db*-nál nagyobb mintaelemszámhoz tartozó ν görbével, mivel a *7. táblázat* $n_{b\delta}$ értékei $n_{b\delta}=1200$ *db*-ig terjednek. A kis- és nagyhalmaz halmazelemszáma között a relatív hiba szempontjából a selejtaránytól független határt vonni nehezebb, mint az abszolút hiba szempontjából, amikor is valamely biztonsági index mellett a selejtarány függvényét képező mértékadó mintaelemszám egy adott határérték alatt mozog. A relatív hibát korlátozó eljárás esetén a nehézséget az okozza, hogy a fentiekkel szemben itt a mértékadó mintaelemszám elvileg $n_{b\delta}=\infty$ értéket is felvehet.

Végezetül bemutatjuk az $N=200$ *db* elemszámú kishalmaz $I_\delta=8000$ biztonsági index esetén szükséges mintaelemszámait tartalmazó *8. táblázatot*, valamint a hozzátartozó általános mintavételi tervet *(9. táblázat)*. Minthogy a mintaelemszámhatár $n_{bH}=128$ *db*, ezért a *8.* és *9. táblázatot* csak azon selejtarány tartományra dolgoztuk ki, amely tartományban a *7. táblázat* $n_{b\delta}\geq 128$ *db* értékei helyezkednek el.

Megjegyezzük, hogy a fent említett kombinált módszer természetesen kishalmazos eljárás esetén is alkalmazható.

Összefoglalás

Cikkünkben a szemcsealak minősítéses — tehát nem a tényleges eloszlás, hanem csak a selejtarány értéke — vizsgálatának tizenkétféle korrekt változatát dolgoztuk ki valószínűségszámítás segítségével. A tizenkét változatot az ítélet abszolút hibáját, relatív hibáját, vagy abszolút és relatív hibáját korlátozni kívánó háromféle eljárás, nagy és kis elemszámú halmazra alkalmazható, számarány és tömegarány vizsgálata alkotja.

A selejtarányról alkotott ítélet megbízhatóságát a valószínűségi változó szórásnégyzete felhasználásával jellemeztük, és a biztonsági index-szel fejeztük ki. A kidolgozott módszerekre az általunk választott megbízhatósági szinten példákat mutattunk be.

IRODALOM

[1] *Rényi, A.:* Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Bp. 1954.

[2] *Szász, P.:* A differenciál- és integrálszámítás elemei. I. kötet. Közoktatásügyi Kiadóvállalat, Bp. 1951.

APPLICATION OF THE WEIBULL DISTRIBUTION TO THE DESCRIPTION OF THE SKEW DISTRIBUTION OF CONCRETE COMPRESSIVE STRENGTH

Hon. Prof. Tibor Kausay

https://doi.org/10.32970/CS.2022.1.3

The extremal distribution is noteworthy because, unlike the normal distribution (Gaussian distribution) and t-distribution (Student distribution) prevalent in engineering, it is generally asymmetric, and therefore is well suited for modeling the actual compressive strength distribution of concrete.

Keywords: *Weibull distribution, extremal distribution, density funciton, concrete, compressive strength, skewness*

1. INTRODUCTION

Mistéth wrote in his studies (1974, 1977, 2000, 2001) that the distribution function of maximum loads follows the upper Weibull distribution, while that of the minimum strength of loadbearing materials follows the lower third extreme (Weibull) distribution. In accordance with *Mistéth, Ujhelyi* (1978, 1985) wrote that probability distribution of the compressive strength for an average quality level concrete production in the lower concrete class range (below C16/20) or for the highly plastic consistency may be approximated by the log-normal distribution with right skewness (extending to the right with positive skewness), while in the higher compressive strength range (beyond C20/25) or for plastic consistency it may be approximated by the lower extremal distribution with skewness to the left (extending to the left with negative skewness). Compressive strength in the middle strength range (C16/20 – C20/25) may be considered to follow the normal distribution.

2. EXTREME VALUE DISTRIBUTIONS (EVD)

An extreme value is either very small or very large value in a probability distribution. These extreme values are found in the tails of a probability distribution (i.e. the distribution's extremities).

Extreme value analysis (EVA) is a branch of statistics dealing with the extreme deviations from the median of probability distributions. EVD has three types which are named after their most famous researchers and each type can be an upper (maximum) and lower (minimum), as can be seen in Table 1.

Based on experiments of *W. Weibull* (1939), for compressive strength distribution of brittle materials (such as for compressive strength distributions of higher strength concretes) the lower *Weibull* extremal value distribution proved to be right from among the three lower extremal value distribution functions *(Rinne*, 2009).

Table 1: *Density function of reduced extreme value distributions (Rinne, 2009)*

Type	Upper or maximum extreme value distribution	Lower or minimum extreme value distribution
I.	$g_{\ f}(u\ \|0;1) = \mathrm{e}^{-u\ -\mathrm{e}^{-u}}$ upper *Gumbel* distribution	$g_{\ a}(u\ \|0;1) = \mathrm{e}^{u\ -\mathrm{e}^{u}}$ lower *Gumbel* distribution
II.	$f_{\mathrm{Fr,f}}(u\|0;1;\mathrm{c}) = = \mathrm{c} \times u^{-\mathrm{c}-1} \times \mathrm{e}^{-u^{-\mathrm{c}}}$ upper *Fréchet* distribution	$f_{\mathrm{Fr,a}}(u\|0;1;\mathrm{c}) = = \mathrm{c} \times (-u)^{-\mathrm{c}-1} \times \mathrm{e}^{-(-u)^{-\mathrm{c}}}$ lower *Fréchet* distribution
III.	$w_{\mathrm{f}}(u\|0;1;\mathrm{c}) = = \mathrm{c} \times (-u)^{\mathrm{c}-1} \times \mathrm{e}^{-(-u)^{\mathrm{c}}}$ upper *Weibull* distribution	$w_{\mathrm{a}}(u\|0;1;\mathrm{c}) = = \mathrm{c} \times u^{\mathrm{c}-1} \times \mathrm{e}^{-u^{\mathrm{c}}}$ lower *Weibull* distribution

3. THE WEIBULL DISTRIBUTION

In probability theory and statistics, the Weibull distribution - named after the Swedish mathematician *Weibull* (1951) - is a continuous probability distribution.

The most general form of Weibull's probability density function has three parameters: γ - shape parameter, μ - location parameter and α - scale parameter. The case where $\mu = 0$ and $\alpha = 1$ is called the standard Weibull distribution. The case where $\mu = 0$ is called the 2-parameter Weibull distribution. In the formulation of the single parameter Weibull distribution the only unknown parameter is the scale parameter, η, i.e. we assume that the shape parameter is known a priori from past experience with identical or similar products.

Note: in the literature different letters are used for the parameters. In this paper the shape parameter is marked with "c", the location parameter with "a" and the scale parameter with "b".

The skewness coefficient is the quotient of the third order moment of the area under the curve of the density function with respect to the center of gravity (μ_3) and the third power of the standard deviation (), *(Palotás*, 1979), (*Hartung* et al., 2009):

$$\gamma_{\text{skewness}} = \frac{\mu_3}{{s_n}^3} = \frac{\left(\frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3\right)}{\sqrt[2]{\left(\frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)^3}}$$

4. DETERMINATION OF WEIBULL DISTRIBUTION PARAMETERS

To evaluate results of the compressive strength tests according to the *Mistéth* theory, values of location parameter „a", of scale parameter „b" (in the literature also λ) and shape parameter „c" (in literature also k) of the *Weibull* distribution must be known.

Our assumptions for their determination are that

- skewness factor of the single-parameter, simplified lower *Weibull* distribution equals the empirical skewness factor obtained from the measurements:

$$\gamma_{\text{skewness,Weibull,low}}(u|0;1;c) = \gamma_{\text{skewness,test}}$$

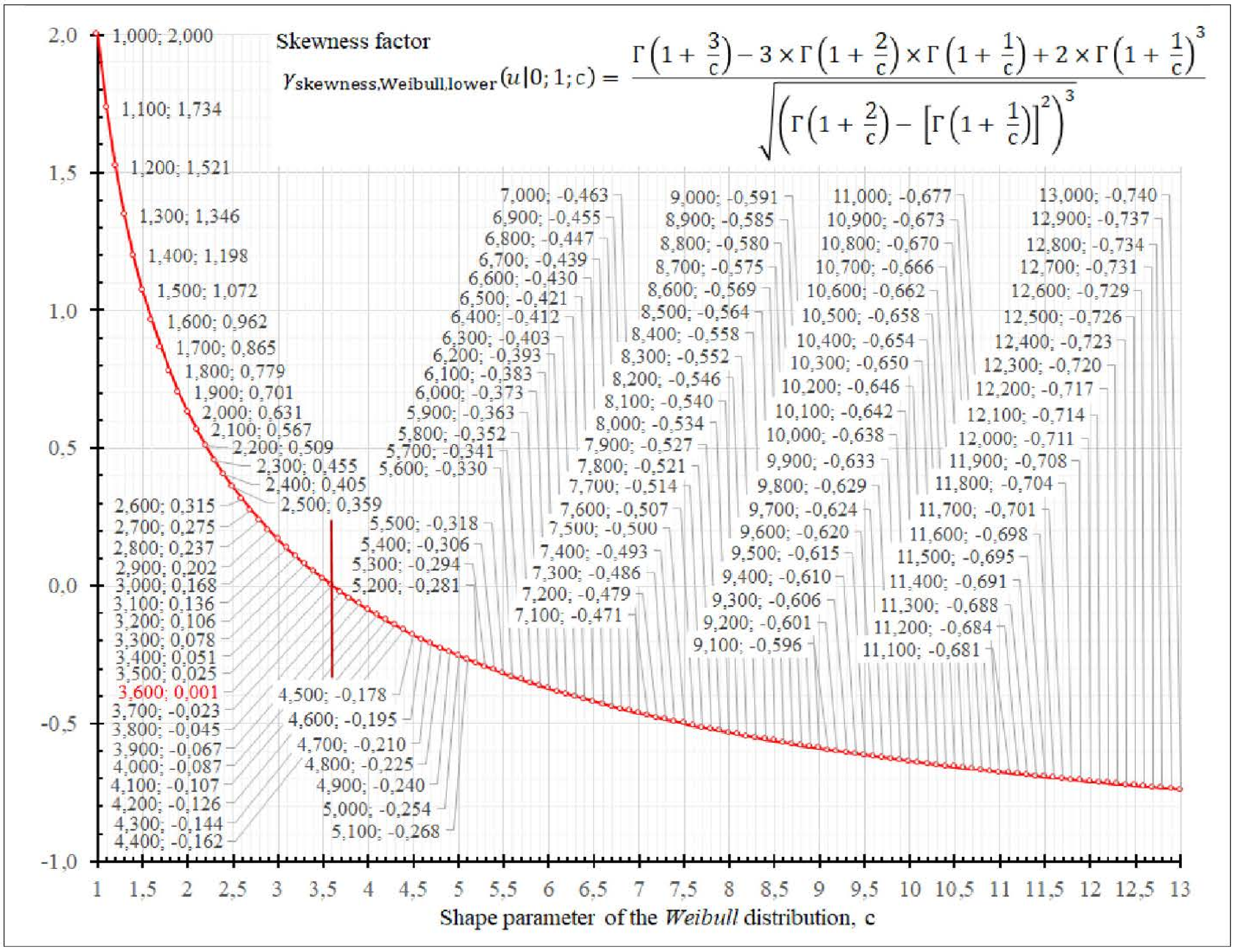
- standard deviation of the two-parameter semi-simplified lower *Weibull* distribution equals to the empirical standard deviation obtained from the measurements:

$$s_{\text{Weibull,low}}(z|0;b;c) = s_{\text{test}}$$

- mean value of the three-parameter lower *Weibull* distribution equals to the empirical average obtained from the measurements:

$$\mu_{\text{Weibull,low}}(x|a;b;c) = f_{\text{cm,test}},$$

Figure 1: Skewness factor of the single-parameter simplified Weibull distribution as a function of the shape parameter „c"



➢ difference between the mean value of the three-parameter lower *Weibull* distribution (which is considered equal with the empirical average) and the mean value of the two-parameter semi-simplified lower *Weibull* distribution equals to the value of the location parameter „a”:

$$a = f_{cm,test} - \mu_{Weibull,low}(z|0;b;c).$$

Recommended steps for the determination of the values of the location parameter „a”, scale parameter „b” and shape parameter „c” are the following:

- Step 1: Into the formula of skewness factor for the single-parameter, simplified lower *Weibull* distribution the empirical skewness factor obtained by the measurements ($\gamma_{skewness,test}$) is introduced and the shape parameter „c” value of the *Weibull* distribution pertinent to the empirical skewness factor is found by implicit iteration:

Figure 2: Standard deviation of the *z* independent variable of the two-parameter lower Weibull distribution semi-simplified assuming that location parameter a = 0, as a function of the scale parameter „b” and the shape parameter „c”, if $1.0 \leq b \leq 10.0$ and if $1.0 \leq c \leq 10.0$

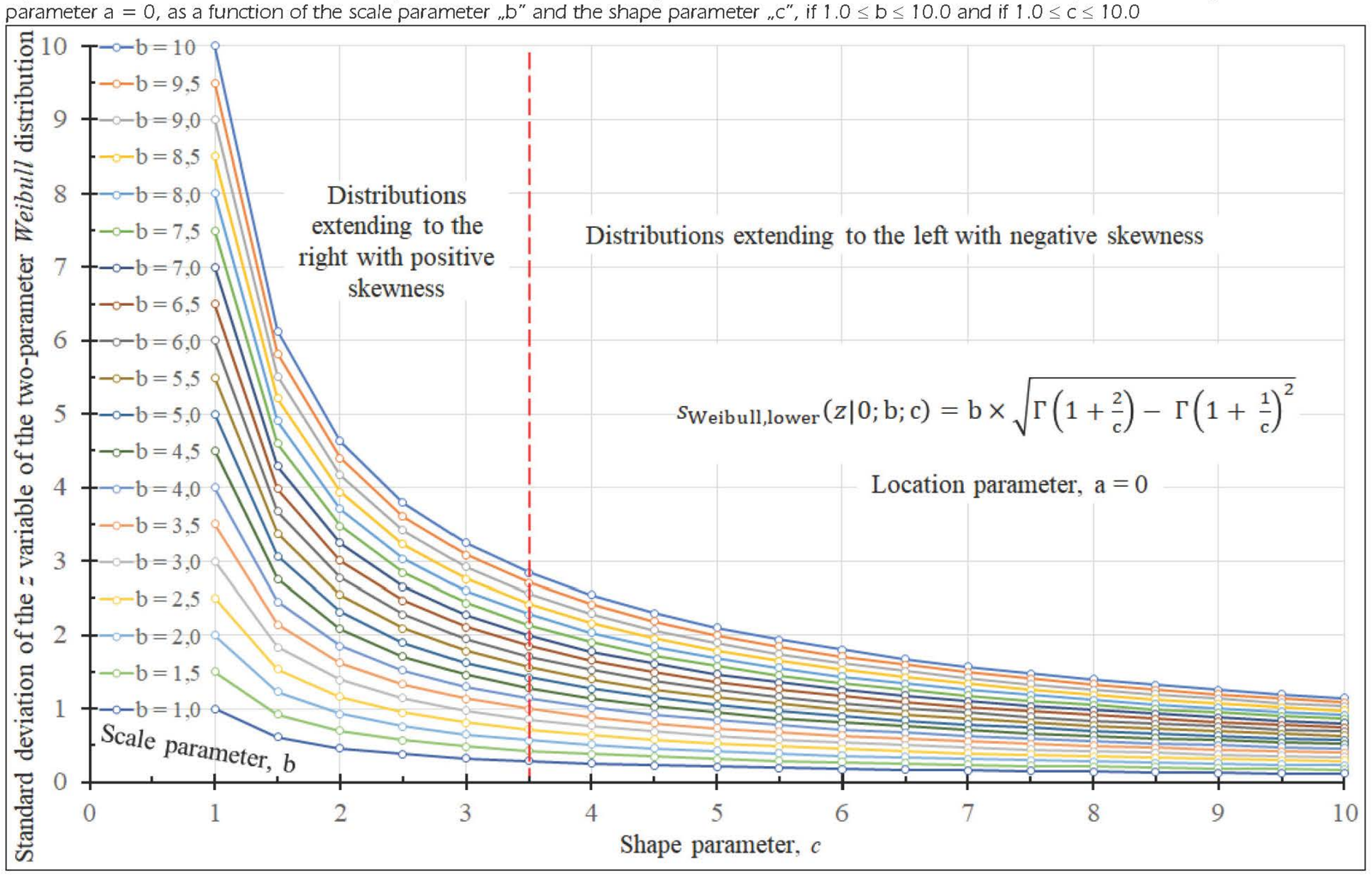


Figure 3: Standard deviation of the z independent variable of the two-parameter lower Weibull distribution semi-simplified by setting the location parameter „a” to 0, as a function of the scale parameter „b” and shape parameter „c”, if $10.0 \leq b \leq 50.0$ and if $1.0 \leq c \leq 10.0$

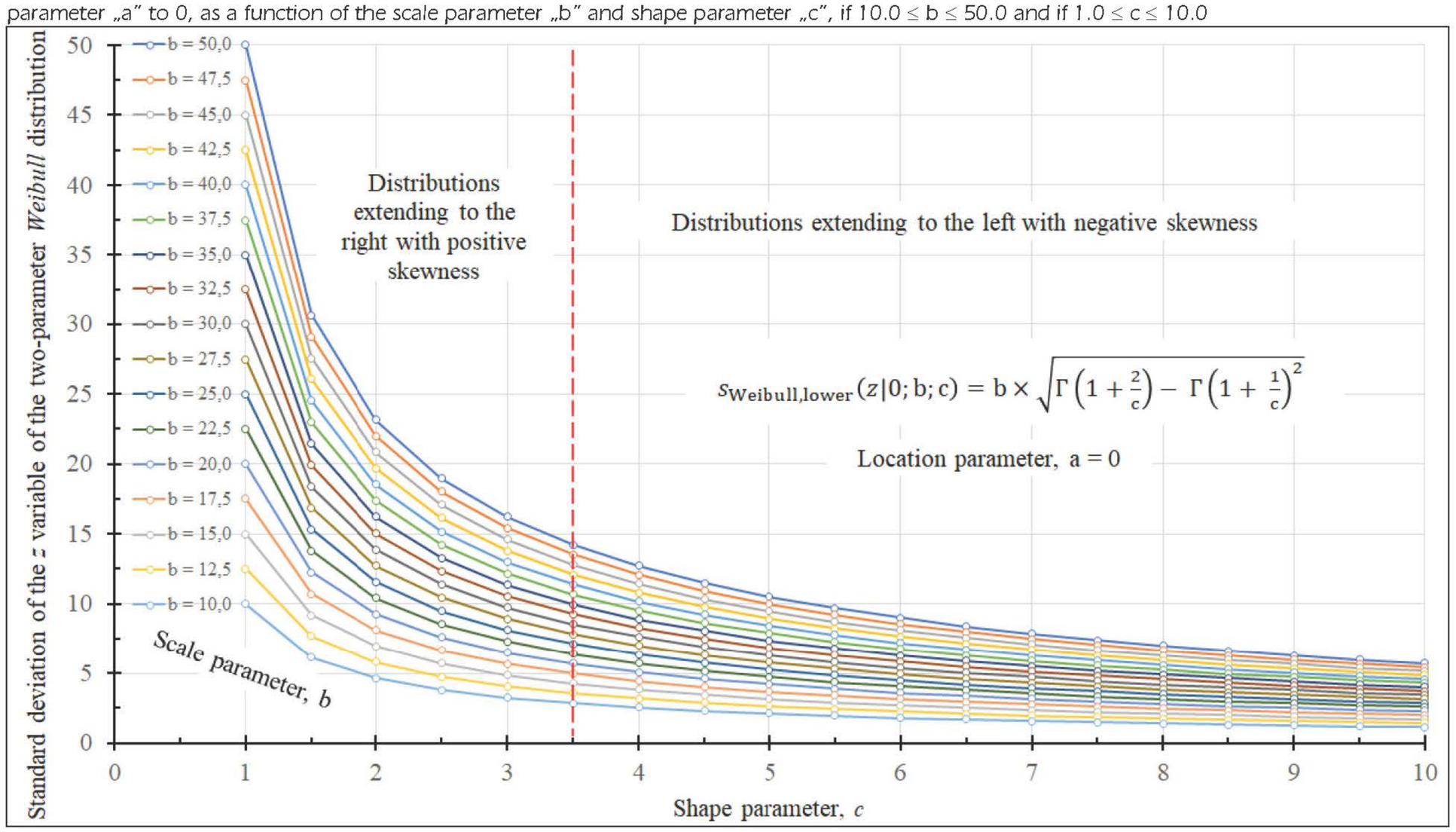


Figure 4: *The quotient of the standard deviation/scale parameter quotient (of the semi-simplified two-parameter lower Weibull distribution (which is proportional to the standard deviation) as function of the shape parameter „c"*

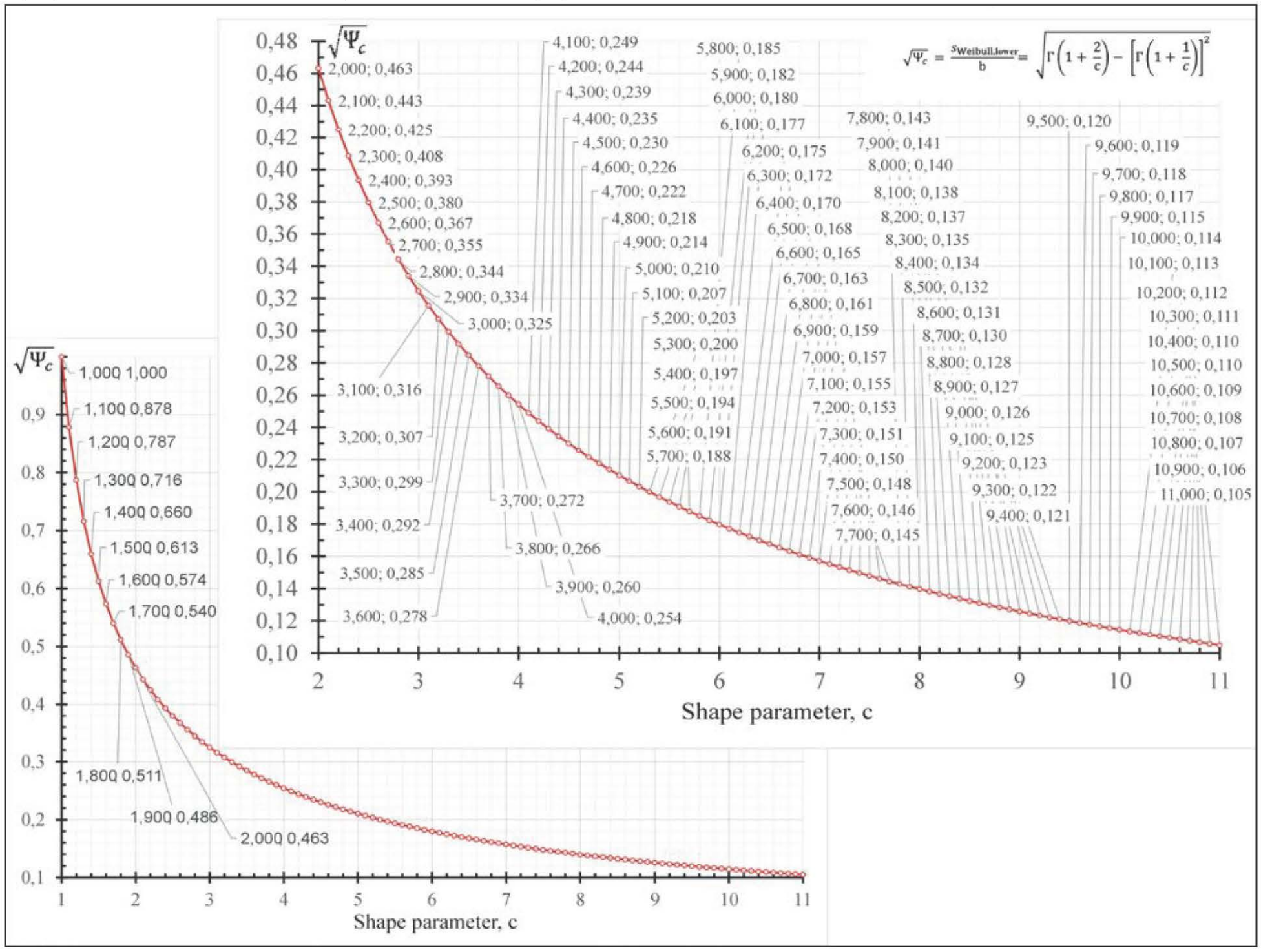
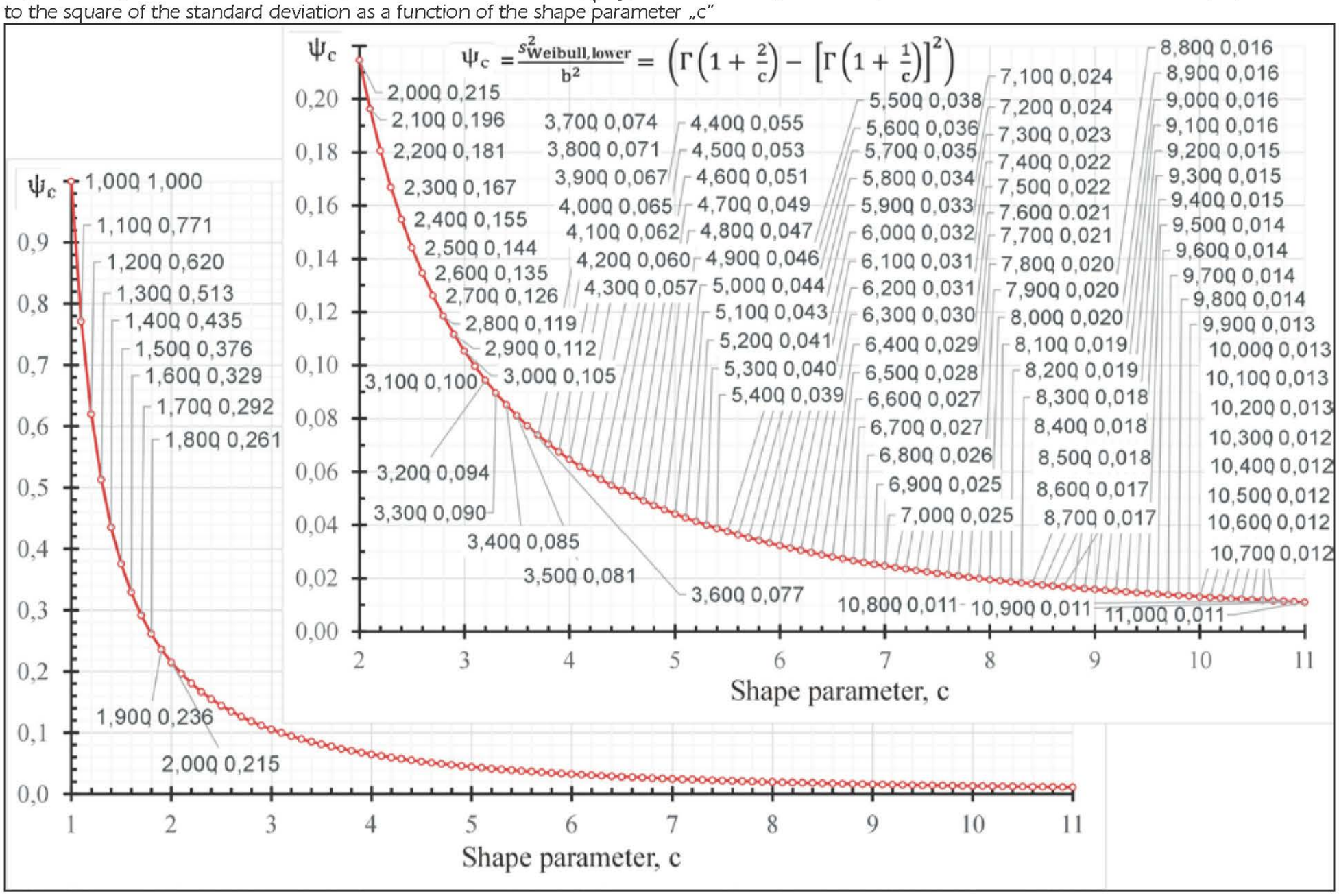


Figure 5: *Squared standard deviation/scale parameter quotient ($\sqrt{\Psi_c}$) of the semi-simplified two-parameter lower Weibull distribution proportional to the square of the standard deviation as a function of the shape parameter „c"*



$$Y_{\text{skewness,Weibull,low}}(u|0;1;c) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{c}\right) - 3\times\Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right)\times\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right) + 2\times\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)^3}{\sqrt{\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)\right]^2\right)^3}} = Y_{\text{skewness,test}}$$

Upon the successive approximation (iteration), calculation of skewness factor of the single-parameter lower *Weibull* distribution is repeated until a value approaching the empirical skewness factor best (e.g. to three decimals) is obtained. *Figure 1* may assist this procedure.

- Step 2: Into the formula of the standard deviation of the two-parameter semi-simplified lower *Weibull* distribution the already known value of the shape parameter c and the value of the empirical standard deviation of the concrete

Figure 6: *Expected mean value of the z independent variable of the two-parameter lower Weibull distribution semi-simplified by the location parameter „a" as a function of the scale parameter „b" and shape parameter „c", if 1.0 ≤ b ≤ 10.0 and if 1.0 ≤ c ≤ 10.0*

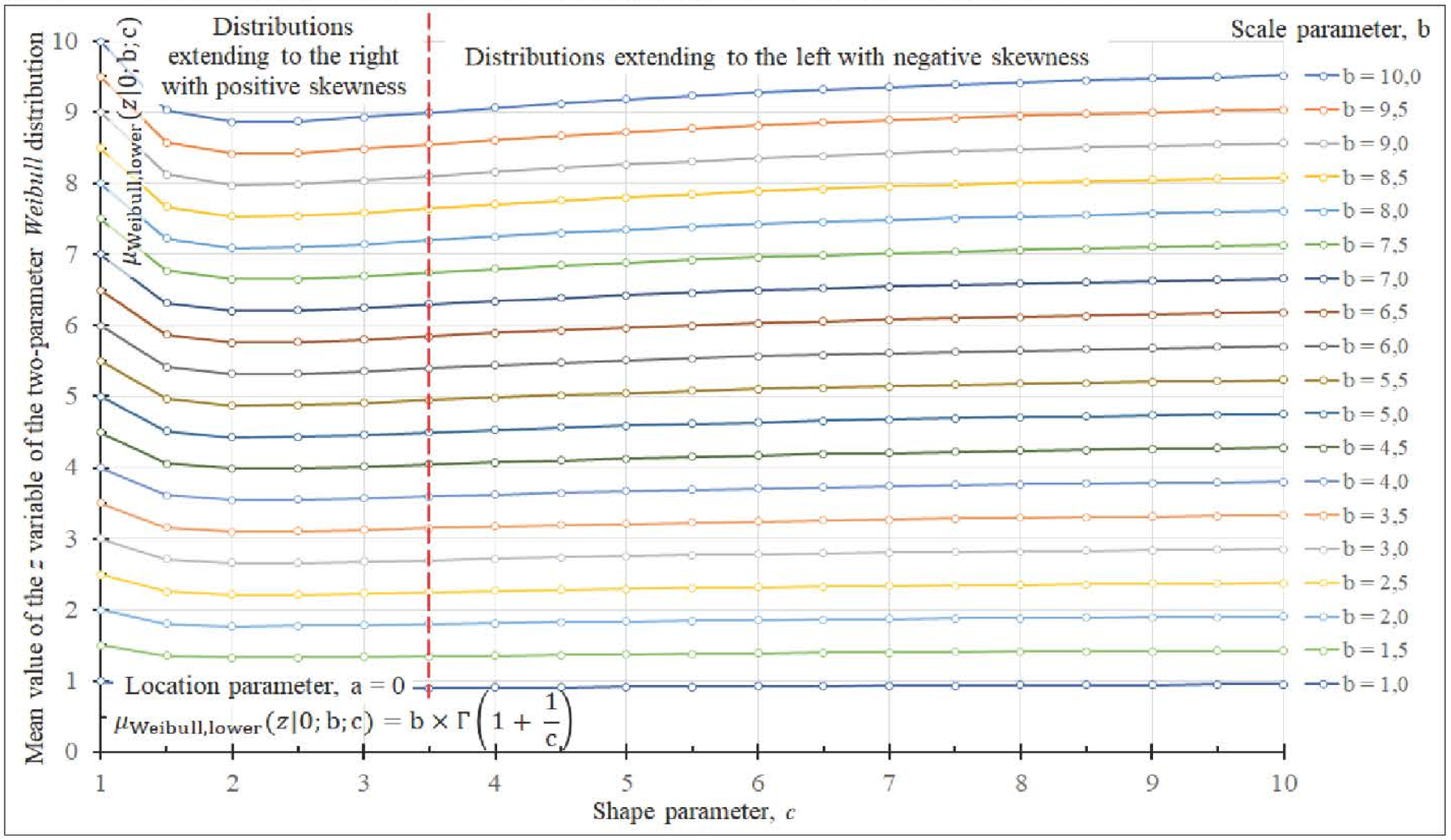


Figure 7: *Expected mean value of the z independent variable of the two-parameter lower Weibull distribution semi-simplified by the location parameter „a" as a function of the scale parameter „b" and shape parameter „c", if 10.0 ≤ b ≤ 50.0 and if 1.0 ≤ c ≤ 10.0*

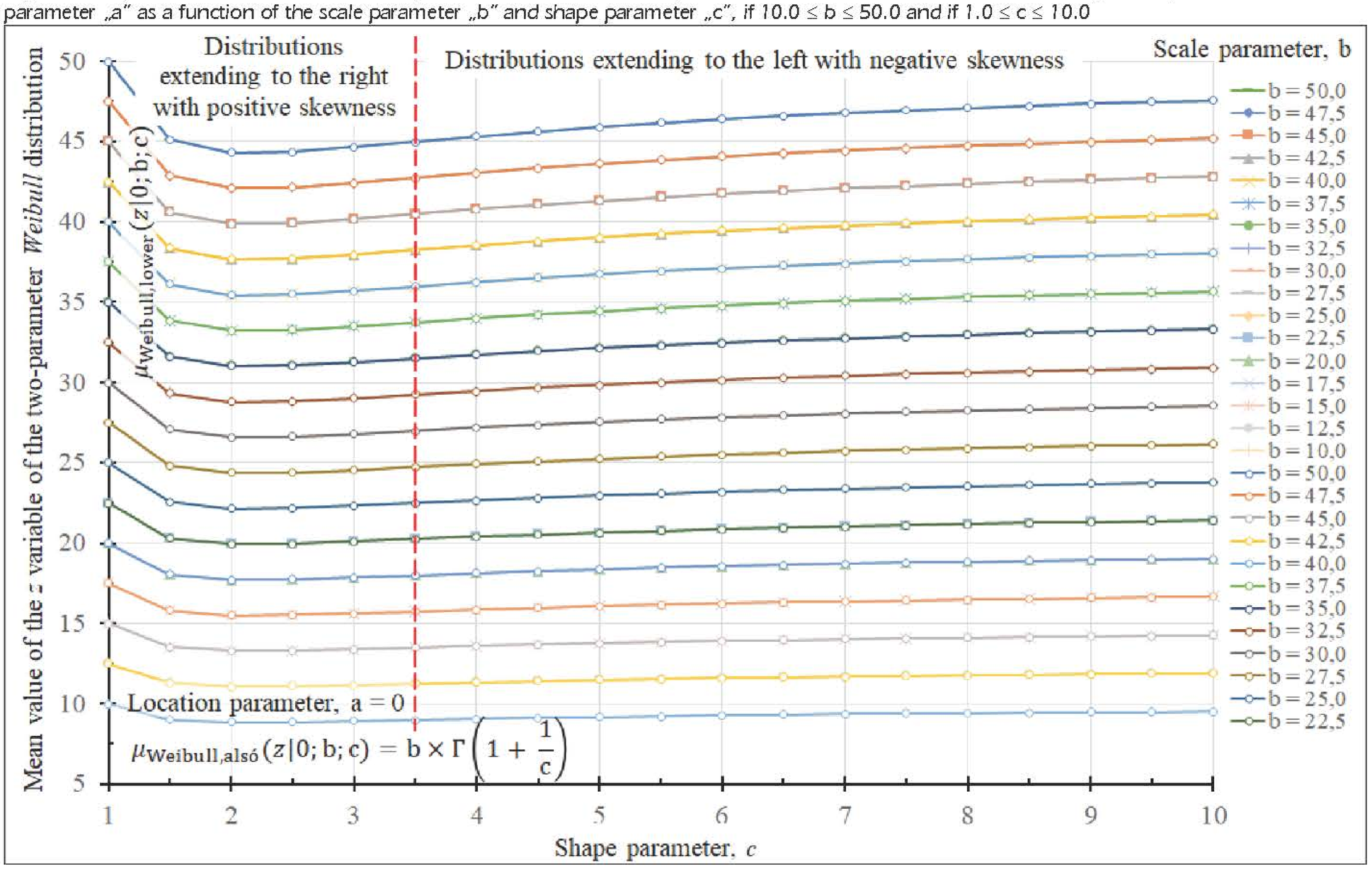


Figure 8: Nomogram for determination of parameters to the lower Weibull distribution

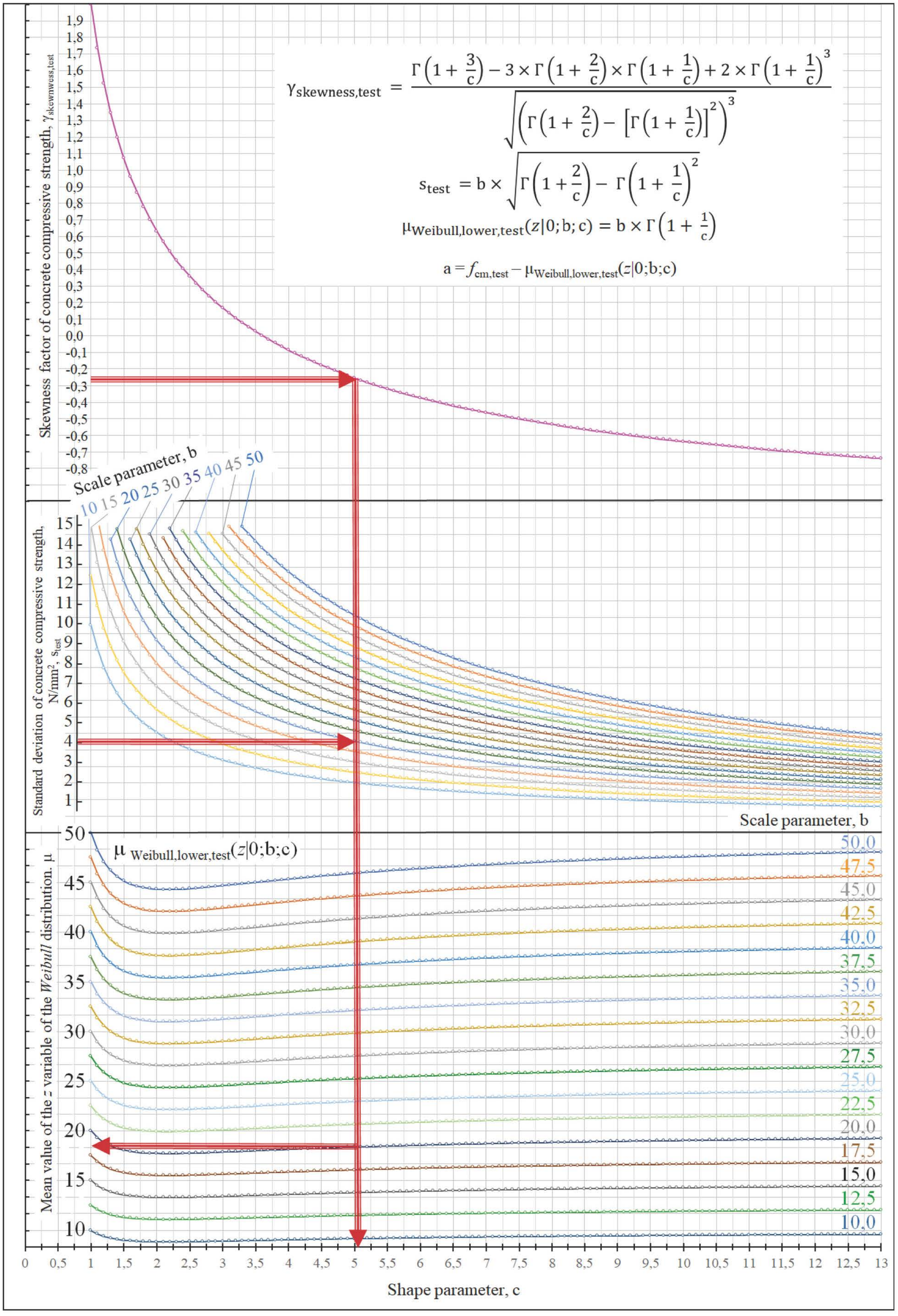


Figure 9: Demonstration for the solution process of the numerical examples in a nomogram

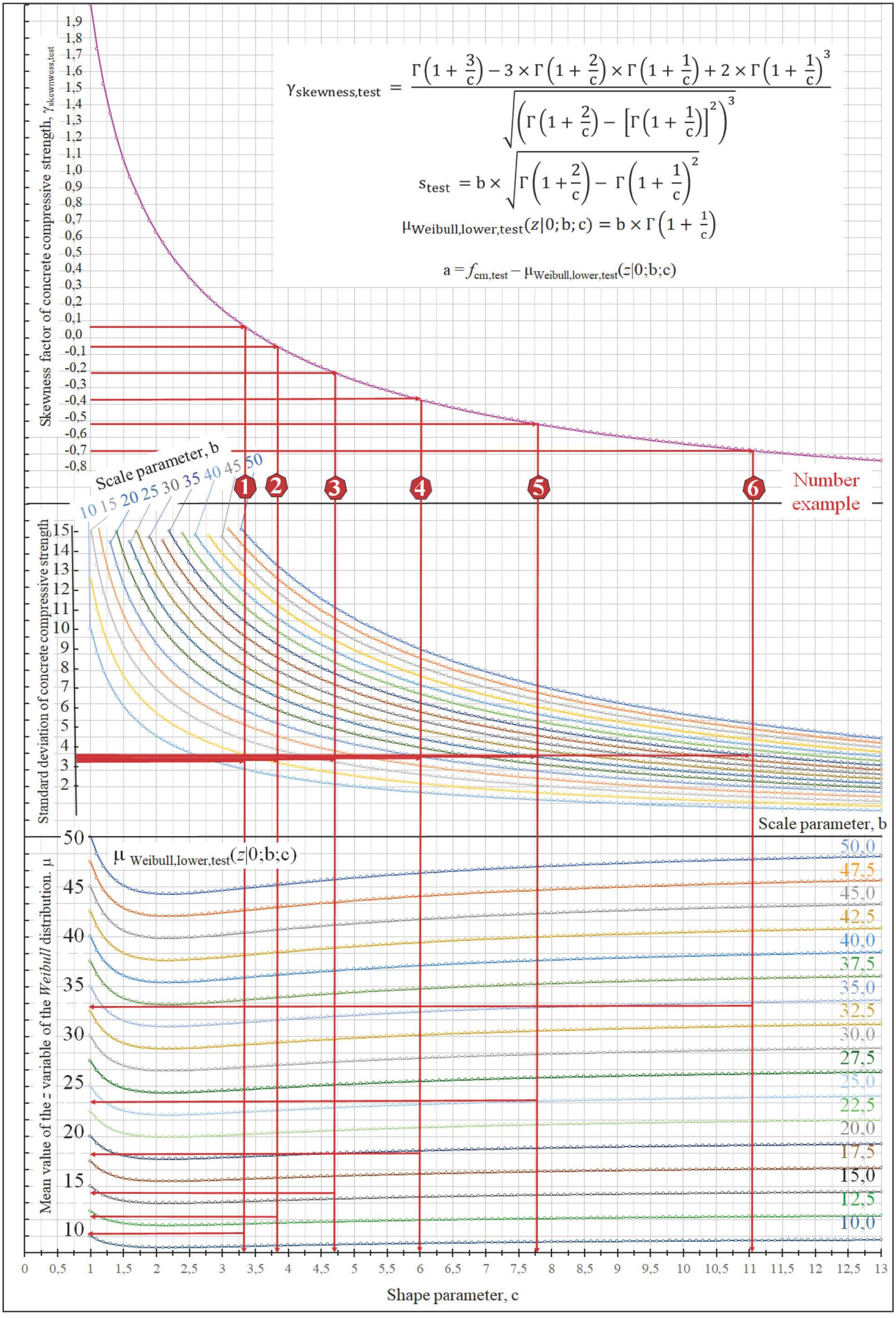


Table 2: *Numerical examples for application of the lower Weibull extreme value distribution in case of concrete strength evaluation*

Sign of the numerical example					
1.	2.	3.	4.	5.	6.
Initial data					
Concrete compressive strength class, EN 1992-1-1:2004+A1:2014 Eurocode 2					
C16/20	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50
Empirical average of concrete compressive strength, N/mm², $f_{cm,cyl,test}$ EN 1992-1-1:2004+A1:2014 Eurocode 2					
24	28	33	38	43	48
Empirical standard deviation of concrete compressive strength, N/mm², s_{test}					
3,40	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65
Empirical relative standard deviation of concrete compressive strength, $s_{rel,test}$					
0,142	0,123	0,106	0,093	0,084	0,076
Empirical skewness factor of concrete compressive strength, $\gamma_{skewness,test}$					
+0,07	-0,05	-0,21	-0,37	-0,52	-0,68
Result of the calculation					
Mean value of the single-parameter simplified *Weibull* distribution,					
0,897	0,904	0,915	0,927	0,941	0,955
Mean value of the two-parameter semi-simplified *Weibull* distribution,					
10,271	11,802	14,436	18,230	23,660	33,430
Location parameter „a" of the *Weibull* distribution					
13,729	16,198	18,564	19,770	19,340	14,570
Scale parameter „b" of the *Weibull* distribution					
11,445	13,054	15,780	19,656	25,157	34,992
Shape parameter „c" of the *Weibull* distribution					
3,329	3,822	4,698	5,968	7,787	11,080
Empirical characteristic value of concrete compressive strength with *Weibull* distribution (5% quantile), N/mm², $f_{ck,test}$					
18,419	22,199	26,939	31,720	36,519	41,334
Empirical acceptance distance of concrete compressive strength with *Weibull* distribution, N/mm², $f_{cm,test} - f_{ck,test}$					
5,581	5,801	6,061	6,280	6,481	6,666
Acceptance constant of according to the number example (acceptance distance / standard deviation)					
1,641	1,681	1,732	1,769	1,800	1,826

compressive strength obtained from the measurements (s_{test}) are taken into account and the value of the scale parameter b of the *Weibull* distribution pertinent to the empirical standard deviation is found by implicit iteration:

$$s_{Weibull,low}(z|0;b;c) = b \times \sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)^2} = s_{test}$$

Upon the successive iteration, calculation of skewness factor of the two-parameter lower *Weibull* distribution is repeated with input of different b values until a best value approaching the empirical skewness factor (e.g. to three decimals) is obtained. *Figures 2 and 3* can assist this procedure. These figures show diagrams of standard deviation for the z independent variable of the semi-simplified two-parameter lower *Weibull* distribution as a function of the scale parameter „b" and the shape parameter „c".
Figures 4 and 5 might also be of help: here diagrams for the z independent variable of the semi-simplified two-parameter lower *Weibull* distribution are shown: the standard deviation/ scale parameter quotient

$$\sqrt{\Psi_c} = \frac{s_{Weibull,low}}{b} = \sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)\right]^2}$$

and the square of the standard deviation/scale parameter quotient

$$\Psi_c = \left(\frac{s_{Weibull,low}}{b}\right)^2 = \left(\Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)\right]^2\right)$$

Calculated value of the shape parameter „c" can be refined by the use of the scale parameter „b", if required.

- Step 3: Mean value of $\mu_{Weibull,low}(z|0;b;c)$ for the two-parameter semi-simpified lower *Weibull* distribution is calculated by implicit iteration using the (already known) values of the scale parameter „b" and shape parameter „c" :

$$\mu_{Weibull,low}(z|0;b;c) = b \times \Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)$$

Figures 6 and 7 show diagrams of the mean value $\mu_{Weibull,low}(z|0;b;c)$ for the two-parameter semi-simplified lower *Weibull* distribution, depicted as a function of scale parameter „b" and shape parameter „c".

Figure 10: Diagrams of Step 1 of the solution for the numerical examples. Curves for the single-parameter generalized (GEV) density function for the lower Weibull distribution

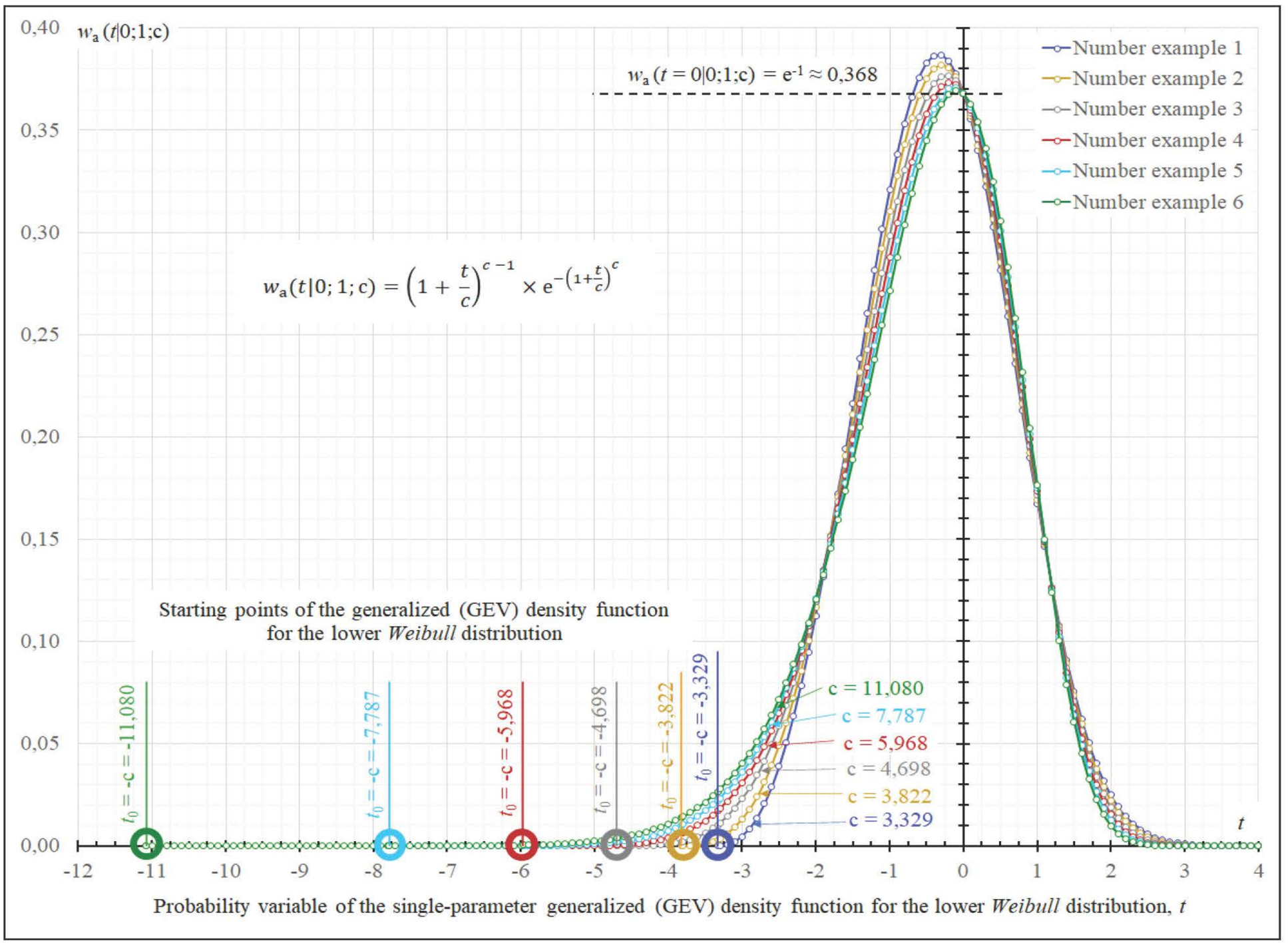


Figure 11: Diagrams of Step 1 of the solution procedure for the numerical examples. Curves of the single-parameter simplified density function for the lower Weibull distribution

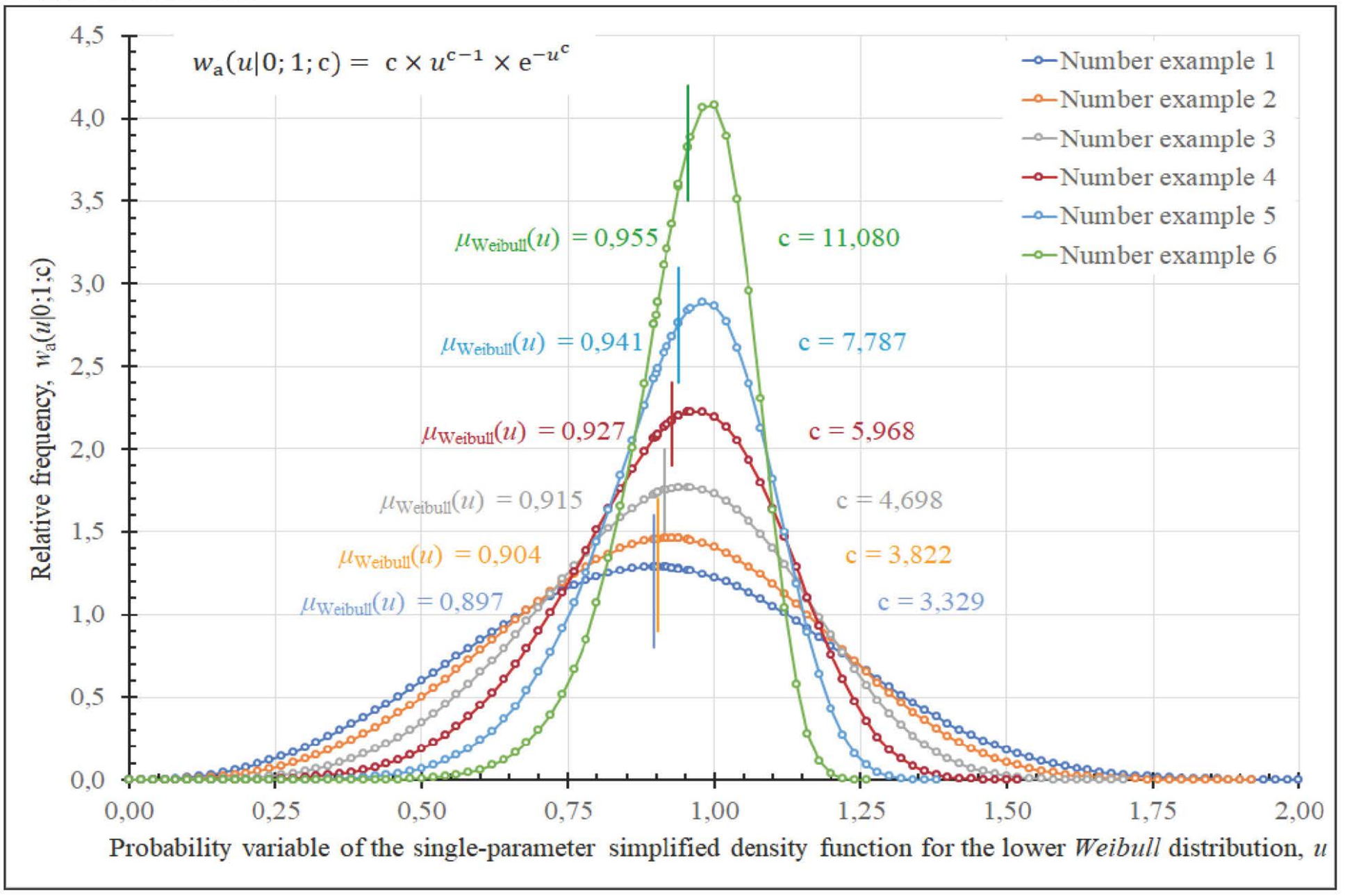
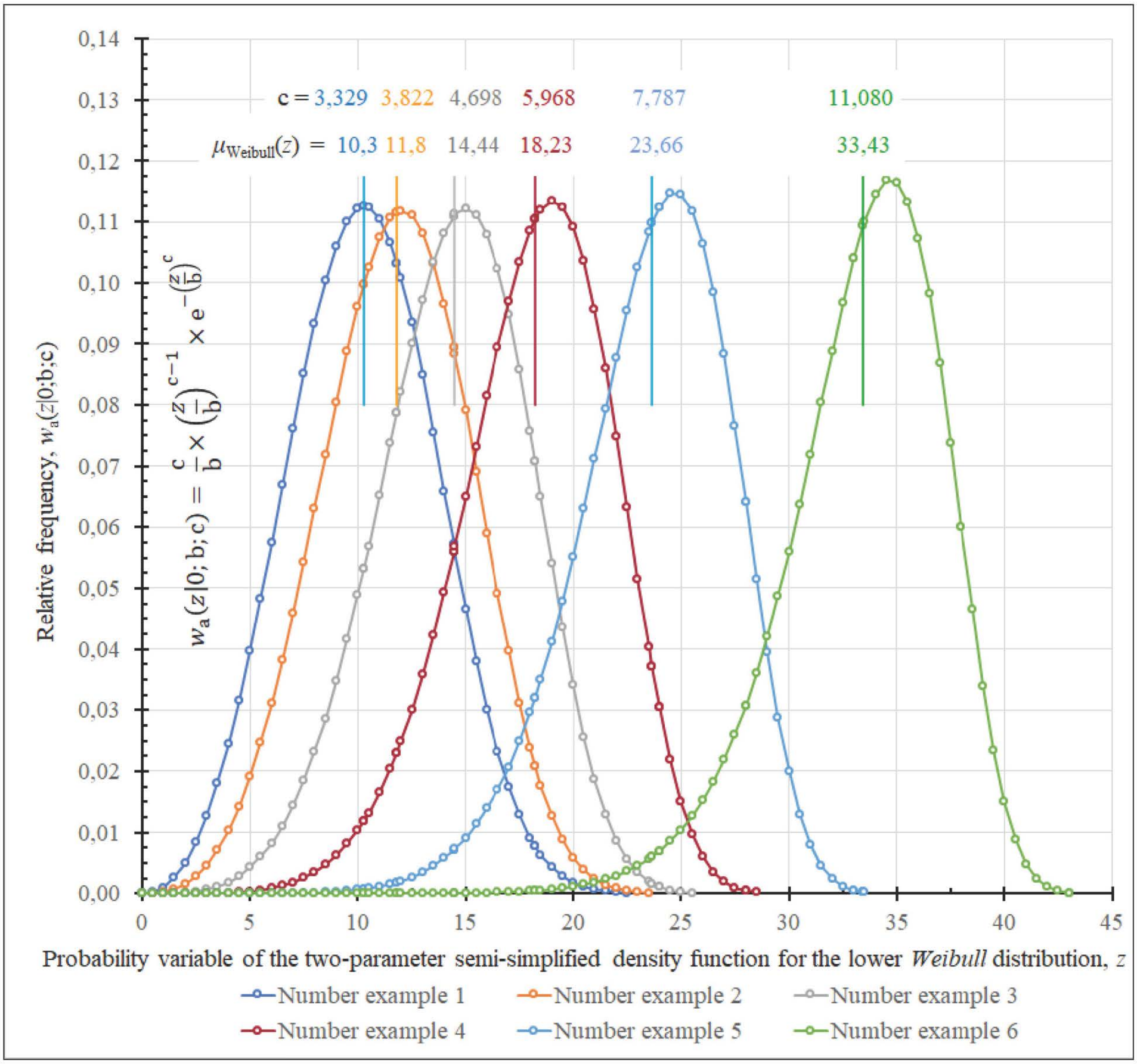


Figure 12: Diagrams for Step 2 of the solution procedure for the numerical examples. Curves of the two-parameter semi-simplified density function for the lower Weibull distribution



Value of the location parameter „a" can be obtained, when (corresponding to our basic assumption) the calculated mean value $\mu_{Weibull,low}(z|0;b;c)$ of the two-parameter semi-simplified lower *Weibull* distribution is subtracted from the empirical average value of the concrete compressive strength ($f_{cm,test}$):

$$a = f_{cm,test} - \mu_{Weibull,low}(z|0;b;c)$$

- Step 4: A nomogram (*Figure 8*) can be constructed using *Figures 1 - 7* in which calculated parameters of the *Weibull* distribution can be presented in their relations.

5. NUMERICAL EXAMPLE FOR EVALUATING THE COMPRESSIVE STRENGTH OF CONCRETE WITH WEIBULL DISTRIBUTION

Numerical examples have been solved by the calculation method of parameters to the *Weibull* distribution as recommended above. Initial data of the numerical examples are: empirical mean value of the concrete compressive strength, its empirical standard deviation and empirical skewness factor. Major results of the calculation are characteristics of the two-parameter *Weibull* distribution: the mean value, the values of the location parameter, the scale parameter, the shape parameter, as well as the empirical characteristic (5% fractile) value and the empirical acceptance distance of the concrete compressive strength following the *Weibull* distribution and its empirical acceptance distance. The initial data of the numerical examples based on older experimental results and result of the calculation are shown in Table 2. Solution process of the numerical examples is shown in *Figure 9*.

Curves have been drawn for the following cases applying the calculated data of the numerical examples: single-parameter generalized extreme value distribution (GEV) density function for the lower *Weibull* distribution (*Figure 10*), single-parameter simplified density function of the same (*Figure 11*), two-parameter semi-simplified density

Figure 13: Diagrams for Step 3 of the solution procedure for the numerical examples. Curves of the three-parameter simplified density function for the concrete compressive strength with the lower Weibull distribution

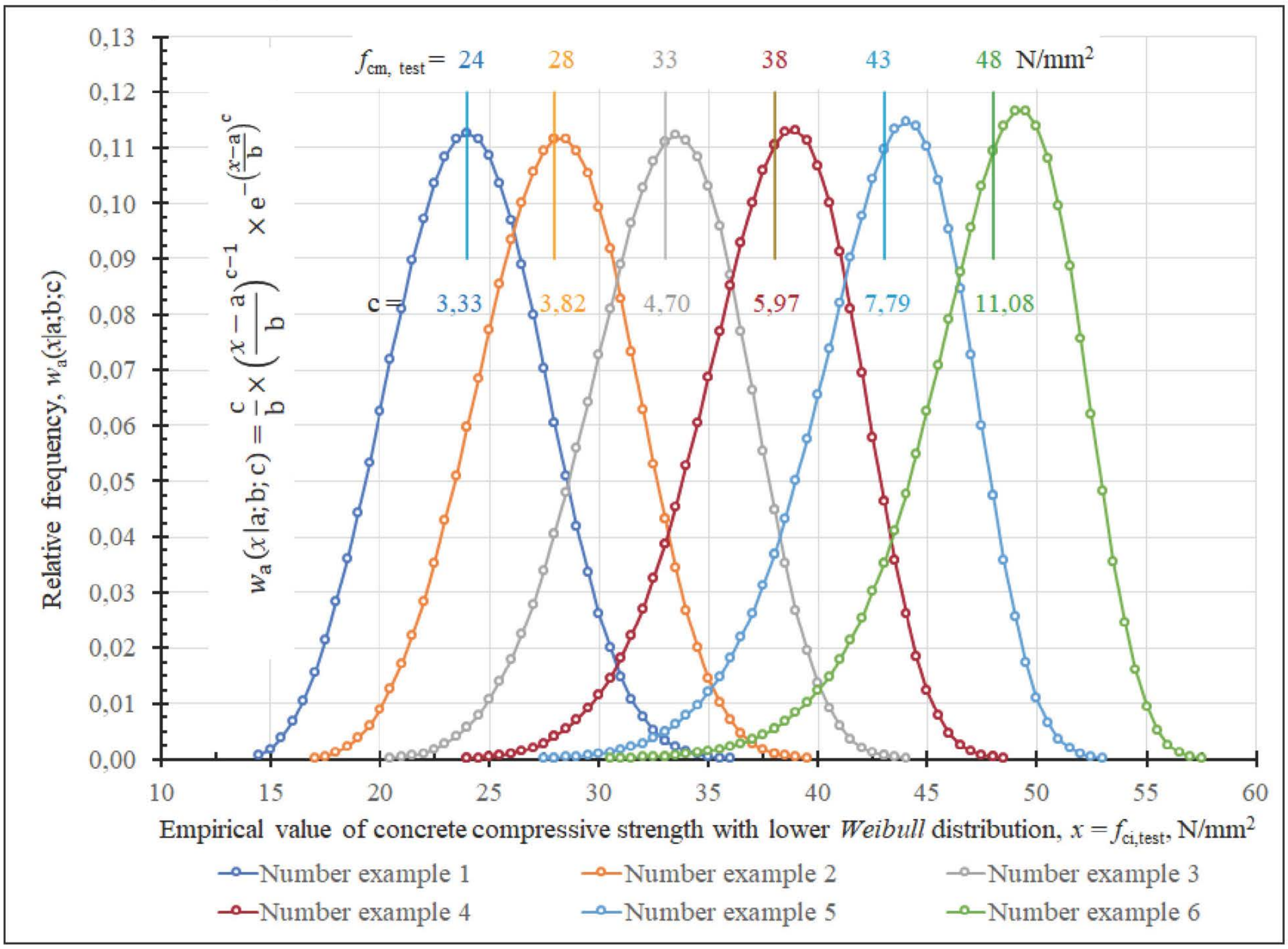
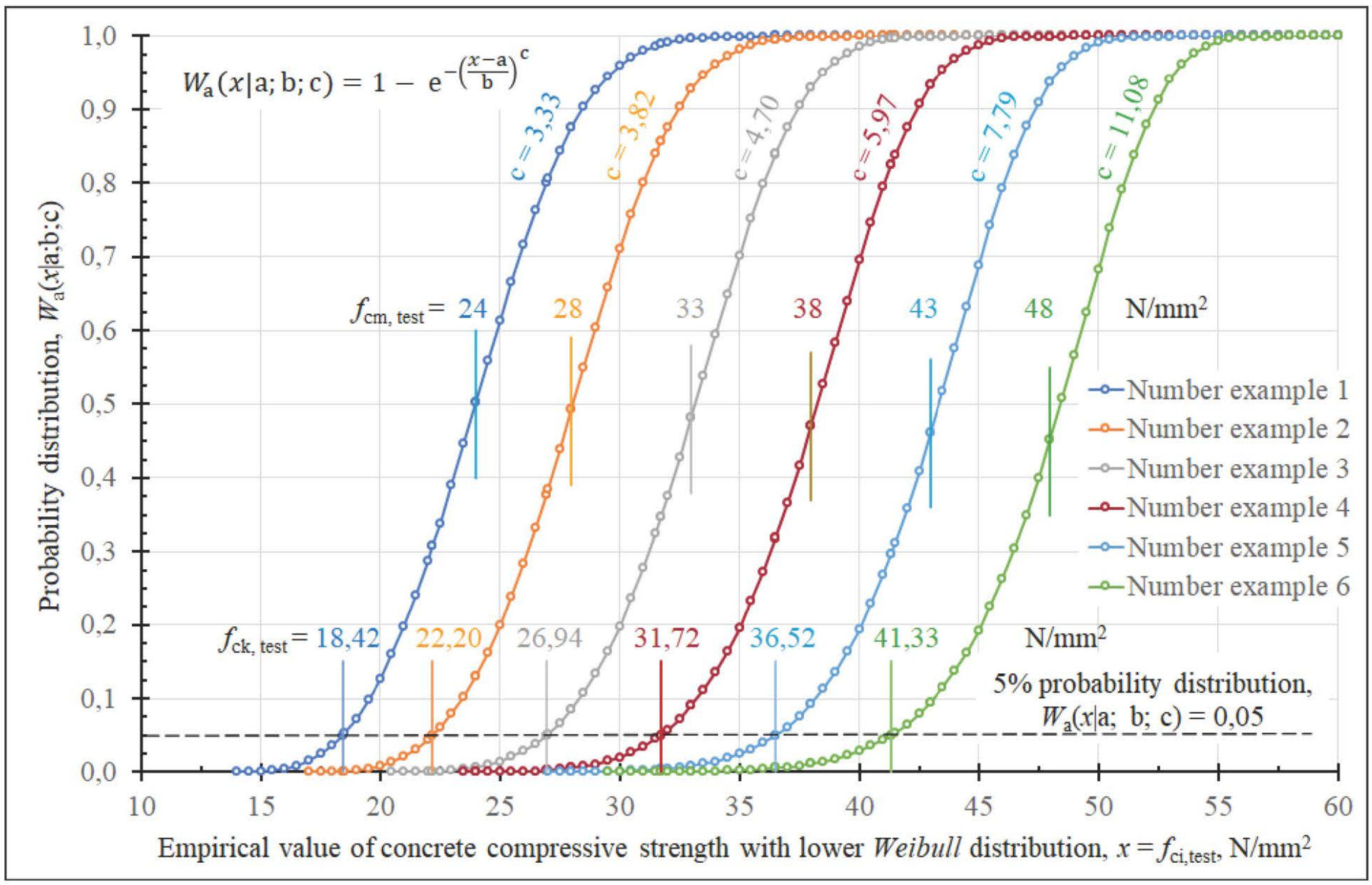


Figure 14: Diagrams for Step 3 of the solution for the numerical example. Curves of the three-parameter simplified distribution function for the concrete compressive strength with lower Weibull distribution



function of the same (*Figure 12*), as well as three-parameter density function and distribution function of the concrete compressive strength characterized with lower *Weibull* distribution (*Figures 13 and 14*, resp.).

The 5% empirical characteristic value for the concrete compressive strength represented with lower *Weibull* distribution was also shown in *Figure 14*. Empirical acceptance distance of the compressive strength ($f_{cm,test} - f_{ck,test}$) is the difference of the empirical average ($f_{cm,test}$) and the empirical characteristic value ($f_{ck,test}$). Values of the difference in our numerical examples exceed 5.5 N/mm^2, in classes beyond C25/30 6 N/mm^2 (*Table 2*).

If the number n of the tested specimens is also considered, the acceptance distance is to be multiplied by the t_n/1,645 quotient, where t_n is *Student*'s t-value (*Federighi,* 1959), (*Stange* et al., 1966). Value of the quotient for a test size with n = 3 is e.g. 2.92/1.645 = 1.775, for a test size with n = 5 it is 2.132/1.645 = 1.296, for a test with n = 15 it is 1.761/1.645 = 1.071 or for a test with n = 35 it is 1.691/1.645 = 1.028.

6. CONCLUSIONS

1. Based on the last but one row of Table 2 we can conclude that the acceptance distance of the concrete compressive strength (performing a really skew distribution) calculated with the lower Weibull distribution is much higher than 4 N/mm^2, as calculated corresponding to 8.2.1.3.2./Method A section of the EN 206:2013+A2:2021 standard pertinent to the initial production, and higher than $1.48 \times \sigma_{test}$ N/mm^2 corresponding to 8.2.1.3.2./Method B section (continuous production) of the same standard.
2. Consequetly, that according to the EN 206:2013+A2:2021 and the subsequent Hungarian product standard MSZ 4798:2016 with certain concrete compressive strength class (e.g. C40/50) has actually a lower average compressive strength – which is the basis for design of concrete composition – which takes into account the average compressive strength of the standards Eurocode (EN 1990:2002+A1:2005) and Eurocode 2 (EN 1992-1-1:2004+A1:2014, EN 1992-2:2005, EN 1992-3:2006) for the same concrete compressive strength class (Kausay et al., 2007).
3. This already unfavorable difference in acceptance factors (e.g. use of 1.48 instead of 1.645) for concretes with higher compressive strengths increases in reality, as we have shown in this publication using the Weibull distribution according to the actual slope (skewness) of the concrete strengths.
4. Evaluation of the concrete compressive strength results with the lower Weibull distribution in the concrete standard EN 206:2013+A2:2021 would serve the safety and durability of our concrete and reinforced concrete structures. Our antecedents who used the k, skewness factor depending on the average compressive strength in the $k \times t_n \times s$ product (expressing the acceptance distance) as it was discribed in the withdrawn MSZ 4720-2:1980 Hungarian standard valid until August 2004. This factor k served an approximate consideration of skewness.

7. REFERENCES

Federighi, E. T. (1959), „Extended tables of the percentage points of Student's *t*-distribution", Journal of the American Statistical Association, Vol. 54. pp. 683-688.

Hartung, J. – Elpelt, B. – Klösener, K.-H. (2009), „Statistik. Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik", Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. München

Kausay, T. – Simon, T. K. (2007), „Acceptance of concrete compressive strength", Concrete Structures (Journal of the Hungarian Group of *fib*), Vol. 8. No. 4., pp. 54-63.

Mistéth, E. (1974), „Erőtani méretezés valószínűségelméleti alapon (Strength sizing on the basis of probability theory)", series of publications of the Institute Építésügyi Minőségellenőrző Intézet. No. 23., Építésügyi Tájékoztatási Központ. Budapest

Mistéth, E. (1977), „Építőanyagok küszöbszilárdságának valószínűségi sűrűségfüggvénye (Probability density function of threshold strength of building materials)", Manuscript. Építéstudományi Intézet. Budapest

Mistéth, E. (2000), „A keresztmetszeti mennyiség valószínűségelméleti alapon való meghatározása (Determination of the cross-sectional quantity on the basis of probability theory)", Vasbetonépítés (Journal of the Hungarian Group of *fib*), Vol. 2. No. 4., pp. 106-111.

Mistéth, E. (2001), „Méretezéselmélet (Sizing theory)", Akadémiai Kiadó. Budapest

Palotás, L. (1979), „Mérnöki szerkezetek anyagtana 1. Általános anyagismeret (Materials Science of Engineering Structures 1. General material knowledge)", Akadémiai Kiadó. Budapest

Rinne, H. (2009), „The Weibull Distribution. A Handbook", CRC Press. Boca Raton (Florida). London, New York

Stange, K. – Henning, H.-J. (1966), „Graf/Henning/Stange. ormeln und Tabellen der mathematischen Statistik", Springer-Verlag. Berlin/Heidelberg/New York

Ujhelyi, J. (1978), „A betonok szilárdsági szórásának és a szilárdság valószínű eloszlásának a vizsgálata (Investigation of the standard deviation of strength and the probable distribution of strength of concretes)", Manuscript. Építéstudományi Intézet. Budapest

Ujhelyi, J. (1985), „Betontechnológia I. (Concrete Technology I.)", Hydraulic engineering aids. Vízdok. Budapest

Weibull, E. H. W. (1939), „The Phenomenon of Rupture in Solids", Ingeniars Vetenskaps Akademiens Handligar. No. 153. Royal Swedish Institute for Engineering Research. Stockholm

8. REFERRED STANDARDS

EN 206:2013+A2:2021 „Concrete. Specification, performance, production and conformity"

EN 1990:2002+A1:2005 "Eurocode. Basis of structural design"

EN 1992-1-1:2004+A1:2014 „Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 1-1: General rules and rules for buildings"

EN 1992-2:2005 „Eurocode 2: Design of concrete strucutres. Part 2: Concrete bridges. Design and detailing rules"

EN 1992-3:2006 „Eurocode 2: Design of concrete strucrures. Part 3: Liquid retaining and containment structures"

MSZ 4798:2016 „Concrete. Specification, performance, production, conformity, and rules of application of EN 206 in Hungary"

MSZ 4720-2:1980 „Quality control of concrete. Control of general characteristics" Withdrawn Hungarian standard

Hon. Prof. Tibor KAUSAY (1934), bachelor of civil engineering (1961), reinforced concrete engineer (1967), PhD (1969), candidate of Technical Sciences (1978), Ph.D. (1997), associate professor (1985), honorary professor at the Budapest University of Technology Department of Civil Engineering (2003), member of the Hungarian Section of the fib (2000), commemorative medal of Count Menyhért Lónyay of the Hungarian Academy of Sciences (2003), holder of the László Palotás Prize (Hungarian Section of the fib, 2015). Its activities cover research, development, expertise, education and standardization in the concrete technology and stone and gravel industries. The number of his publications is about 220.

BETON-NYOMÓSZILÁRDSÁG ÉRTÉKELÉSE *WEIBULL*-ELOSZLÁSSAL

1. Bevezetés

Az extrémérték-eloszlás vagy más szóval extremális-eloszlás egy eloszláscsaládot leíró gyűjtőfogalom, amely azért figyelemre méltó, mert a műszaki tudományokban is elterjedten alkalmazott normális-eloszlással (*Gauss*-eloszlással) és *t*-eloszlással (*Studen*t-eloszlással) szemben az extrémérték-eloszlás általában nem – vagy csak kivételes esetekben, és akkor is csak közelítőleg – szimmetrikus, és ezért a tényleges valószínűségi előfordulások modellezésére széleskörben alkalmazható.[1]

Az extremális-eloszlás betontechnológiai szempontból azért érdemel figyelmet, mert *Mistéth Endre* (1974, 1977) nyomán *Ujhelyi János* (1978, 1985) szerint átlagos színvonalú betonkészítés esetén a nyomószilárdság valószínűségi eloszlása a kisebb szilárdságú betonok (B 50 – B 140, mai C16/20 alatti betonok) tartományában, vagy az erősen képlékeny konzisztencia esetén a jobbra ferde (jobbra elnyúló, pozitív ferdeségű) logaritmikusan normális-eloszlással (lognormális-eloszlással) közelíthető, míg a nagyobb szilárdságok tartományában (B 400 – B 560, mai C20/25 fölötti betonok), vagy földnedves konzisztencia esetén a balra ferde (balra elnyúló, negatív ferdeségű) második alsó extremális-eloszlással közelíthető.[2]

A közepes szilárdságok (B 200 – B 280, mai C16/20 – C20/25) tartományában normálisnak tekinthető a nyomószilárdság eloszlása. Ezt az elvet a gyakorlatban a beton nyomószilárdsága jellemző értékének, illetve alulmaradási tágasságának kiszámításához a szilárdság eloszlásának ferdeségét figyelembe vevő k tényező $k = 0{,}54 + 0{,}1027 \times \sqrt{R_m}$ összefüggésének – amelyben R_m az átlagos nyomószilárdság N/mm^2 mértékegységben – alkalmazásával 1980 júliusa és 2004 augusztusa között az MSZ 4720-2:1980 szabvány érvénye idején követtük. A mai MSZ EN szabványokban a betonszilárdságok normális-eloszlását, tehát a szilárdságértékek szimmetrikus eloszlását tételezik fel.

Mistéth Endre (1974, 1977, 2000, 2001) tanulmányaiban arról írt, hogy a terhek maximumainak eloszlásfüggvénye a felső extrémérték-eloszlást, a teherhordó anyagok tulajdonságai minimumainak eloszlásfüggvénye az alsó harmadik extrémérték-eloszlást követi. *W. Weibull* kísérletei alapján a rideg anyagok, mint például a nagyobb szilárdságú betonok nyomószilárdságának az eloszlására az alsó III. *Weibull* extrémérték-eloszlás bizonyult igaznak.

A beton nyomószilárdság vizsgálati eredményeinek értékelése az aszimmetriát jól kifejező alsó Weibull-eloszlással az MSZ EN 206:2013+A2:2021 betonszabványban beton-

---

[1] Például:

- a visszavont DIN 1055-100:2001 szabványban a változó hatások jellemző (karakterisztikus) értékének fogalmát, amely ritkán fellépő értéknek felel meg, adott referencia-időszakra vonatkozóan az extrémérték-eloszlás 98%-os kvantiliseként határozták meg;
- az acél fáradási élettartamát az extrémérték-eloszláscsaládba tartozó *Weibull*-eloszlással szokás jellemezni (*Braml,* 2010);
- *Mistéth Endre* méretezéselmélete az extrémérték-eloszláson alapul (lásd: *Weibull*-eloszlás);
- Az MSZ EN 1990:2011 Eurocode méretezési szabványban a meteorológiai hatásokat extrémérték-eloszlás feltételezésével vették figyelembe.

[2] Az *Ujhelyi* (1978, 1985) említette „második alsó extremális-eloszlás" alatt a III. típusú alsó *Weibull*-eloszlás értendő, ugyanis *Misteth Endre* hivatkozott műveiben (1974, 1977, 2001) a *Weibull*-eloszlást II. típusú extrémérték-eloszlásként (extremális-eloszlásként) tárgyalta, és *Ujhelyi János* ezt a sorszámozást *Misteth Endrétől* átvette. *Misteth* (1974) idevágó mondata így szól: „Az alsó extremumok eloszlásfüggvényei közül a II. típusú a leggyakoribb. A műszaki gyakorlatban még *Weibull*-eloszlás néven is ismert."

Ujhelyi János dolgozataiban a balra elnyúló sűrűségfüggvényű (negatív ferdeségű) eloszlást jobbra ferdülőnek nevezte. Dolgozatunkban a negatív ferdeségű eloszlást balra ferdülőnek tekintjük.

és vasbeton szerkezeteink biztonságát és tartósságát szolgálná, hasonlóképpen ahhoz, ahogy 1980 és 2004 között az MSZ 4720-2 magyar szabványban a biztonság és a tartósság érdekében a jellemző érték (karakterisztikus érték, f_{ck}) kiszámításához egy k ferdeségi tényezőt alkalmaztunk. Az MSZ 4720-2:1980 magyar szabványban a beton nyomószilárdságának karakterisztikus értékét az $f_{ck,test} = f_{cm,test} - k \times t_n \times s_{test}$ képlettel számítottuk ki, ahol t_n a *Student*-tényező és s_{est} a szórás. A k ferdeségi tényező értéke a betonnyomószilárdság átlagának ($f_{cm,test}$) volt a függvénye.

2. Extrémérték-eloszlás, extremális-eloszlás

A matematikai statisztikában extrémérték-eloszláson a független és azonos eloszlású x_i valószínűségi változójú n elemű minták nagyság szerint sorba rendezett mintaelemei szélsőértékeinek, azaz a minták legnagyobb vagy legkisebb értékeinek (vizsgálati adatainak), az ún. extrémértékeknek vagy kiugró értékeknek a valószínűségi eloszlását értik. Az extrémérték-eloszlás nem csak a szélsőértékek, hanem a jellemző értékek (karakterisztikus értékek) valószínűségi eloszlásának leírására is alkalmas (*Rinne*, 1995).

Más értelemben például a normális-eloszlás eloszlás esetén kiugró értékeknek azokat tekintik, amelyek a szórás háromszorosánál jobban eltérnek az átlagtól.

Az extrémérték-eloszlásnak a leghíresebb kutatóikról nevezett három típusa van, amelyek mindegyike a szélsőérték jellégétől függően felső vagy alsó extrémérték-eloszlás (*1. táblázat*).

1. táblázat: Egyparaméteres, egyszerűsített (reduced) extrémérték-eloszlások sűrűségfüggvénye (*Rinne*, 2009)

Típus	A legnagyobb (felső vagy maximális) extrémértékek eloszlásának	A legkisebb (alsó vagy minimális) extrémértékek eloszlásának
	egyszerűsített sűrűségfüggvénye	
I.	$g_f(u\|0;1) = e^{-u-e^{-u}}$ felső *Gumbel*-eloszlás	$g_a(u\|0;1) = e^{u-e^{u}}$ alsó *Gumbel*-eloszlás
II.	$f_{Fr,f}(u\|0;1;c) =$ $= c \times u^{-c-1} \times e^{-u^{-c}}$ felső *Fréchet*-eloszlás	$f_{Fr,a}(u\|0;1;c) =$ $= c \times (-u)^{-c-1} \times e^{-(-u)^{-c}}$ alsó *Fréchet*-eloszlás
III.	$w_f(u\|0;1;c) =$ $= c \times (-u)^{c-1} \times e^{-(-u)^{c}}$ felső *Weibull*-eloszlás	$w_a(u\|0;1;c) =$ $= c \times u^{c-1} \times e^{-u^{c}}$ alsó *Weibull*-eloszlás

3. A *Weibull*-eloszlás paramétereinek meghatározása

A *Waloddi Weibull* (1887–1979) svéd mérnök és matamatikus 1939 és 1977 közötti munkásságán alapuló *Weibull*-eloszlásnak három paramétere van, mint az „a” helyparaméter (az irodalomban például x_0-val is jelölik), a „b” skálaparaméter (az irodalomban például λ-val is jelölik) és a „c” alakparaméter (az irodalomban például k-val is jelölik).

A háromparaméteres alsó *Weibull*-eloszlás a = 0 helyettesítéssel kétparaméteres, a = 0 és b = 1 helyettesítéssel egyparaméteres alsó *Weibull*-eloszlássá transzformálható.

A betonnyomószilárdság vizsgálat eredményének *Mistéth*-elmélet szerinti értékeléséhez ismerni kell a vizsgálati eredmények eloszlását leíró alsó *Weibull*-eloszlás paramétereinek értékét.

Alapvetésünk ezek meghatározásához, hogy

- az egyparaméteres, egyszerűsített alsó *Weibull*-eloszlás ferdeségi együtthatója megegyezik a mérésekkel kapott tapasztalati ferdeségi együtthatóval:

$$\gamma_{\text{skewness,Weibull,alsó}}(u|0;1;\text{c}) = \gamma_{\text{skewness,test}}$$

- a kétparaméteres, félig egyszerűsített alsó *Weibull*-eloszlás szórása megegyezik a mérésekkel kapott tapasztalati szórással:

$$s_{\text{Weibull,alsó}}(z|0;\text{b};\text{c}) = s_{\text{test}}$$

- a háromparaméteres alsó *Weibull*-eloszlás várható értéke megegyezik a mérésekkel kapott tapasztalati átlaggal:

$$\mu_{\text{Weibull,alsó}}(x|\text{a};\text{b};\text{c}) = f_{\text{cm,test}},$$

- a háromparaméteres alsó *Weibull*-eloszlás tapasztalati átlaggal azonosnak tekintett várható értékének és a kétparaméteres, félig egyszerűsített alsó *Weibull*-eloszlás várható értékének különbsége azonos az „a” helyparaméter értékével:

$$\text{a} = f_{\text{cm,test}} - \mu_{\text{Weibull,alsó}}(z|0;\text{b};\text{c})$$

Az „a” helyparaméter, „b” skálaparaméter és „c” alakparaméter értéke meghatározásának ajánlott lépései a következők:

- Első lépés: Az egyparaméteres, egyszerűsített alsó *Weibull*-eloszlás ferdeségi együtthatójának képletébe beírjuk a mérésekkel kapott tapasztalati ferdeségi együttható értékét ($\gamma_{\text{skewness,test}}$), és implicit iterációval megkeressük a *Weibull*-eloszlás „c” alakparaméterének a tapasztalati ferdeségi együtthatóhoz tartozó értékét:

$$\gamma_{\text{skewness,Weibull,alsó}}(u|0;1;\text{c}) =$$

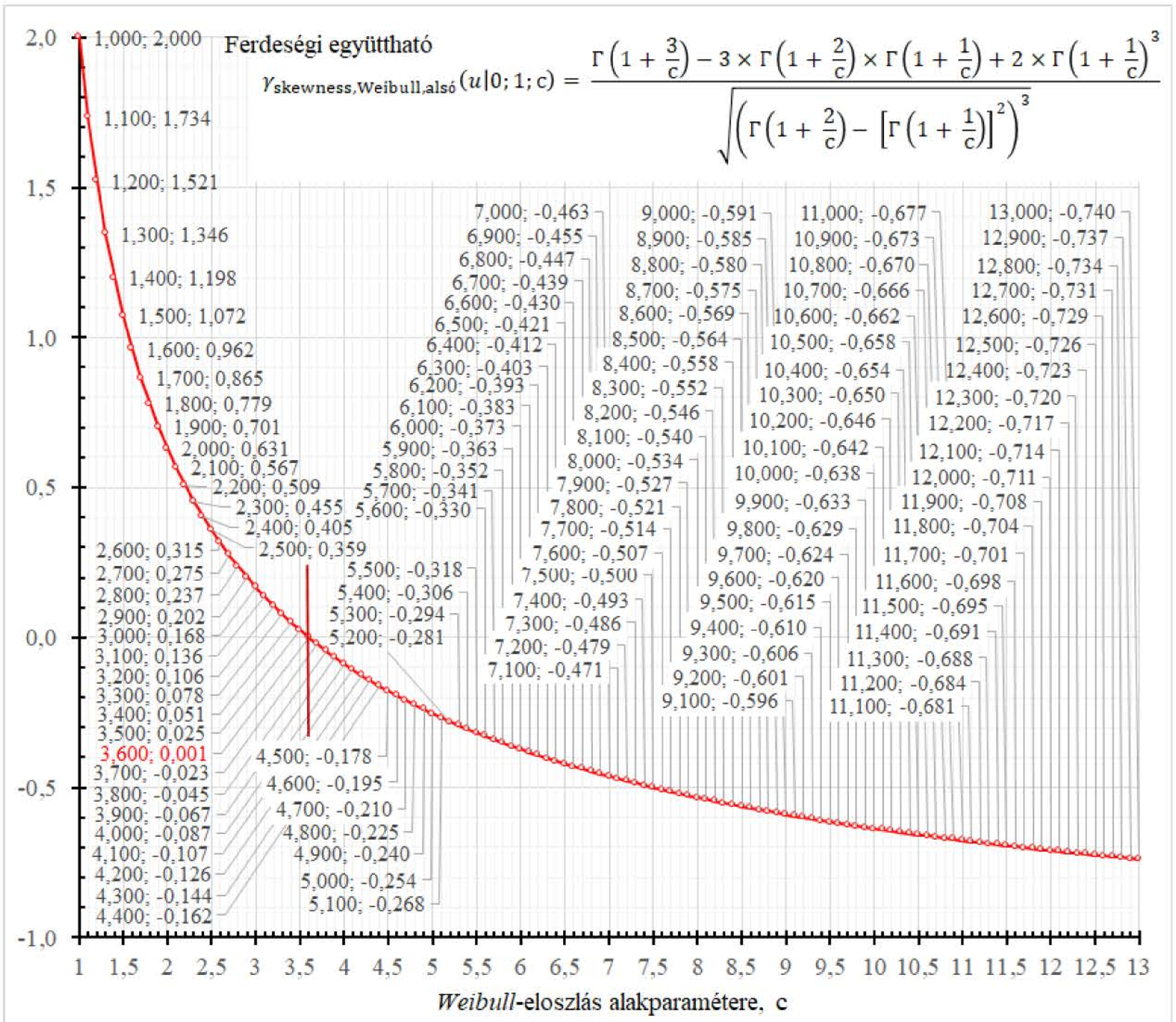
$$= \frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{\text{c}}\right) - 3\times\Gamma\left(1+\frac{2}{\text{c}}\right)\times\Gamma\left(1+\frac{1}{\text{c}}\right) + 2\times\Gamma\left(1+\frac{1}{\text{c}}\right)^3}{\sqrt{\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\text{c}}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\text{c}}\right)\right]^2\right)^3}} =$$

$$= \gamma_{\text{skewness,test}}$$

A mérési eredményekből a tapasztalati ferdeségi együttható értékét, amely a harmadrendű momentumnak (μ_3) és a szórás harmadik hatványának a hányadosa (s_n^3), a következő képlettel számítjuk ki *(Palotás*, 1979), (*Hartung* et al., 2009):

$$\gamma_{\text{skewness,test}} = \frac{\mu_3}{{s_n}^3} = \frac{\left(\frac{1}{\text{n}}\times\sum_{\text{i}=1}^{\text{n}}(x_\text{i} - \bar{x})^3\right)}{\sqrt[2]{\left(\frac{1}{\text{n}}\times\sum_{\text{i}=1}^{\text{n}}(x_\text{i} - \bar{x})^2\right)^3}}$$

A fokozatos közelítés (iteráció) során különböző „c” értékek felvételével addig ismételjük az egyparaméteres alsó *Weibull*-eloszlás ferdeségi együtthatójának a kiszámítását, ameddig a tapasztalati ferdeségi együttható értékét legjobban (például három tizedesre) megközelítő értéket megkapjuk. Ehhez segítségünkre lehet az *1. ábra.*



1. ábra: Az egyparaméteres, egyszerűsített *Weibull*-eloszlás ferdeségi együtthatója a „c” alakparaméter függvényében

- Második lépés: A kétparaméteres, félig egyszerűsített alsó *Weibull*-eloszlás szórásának képletébe beírjuk a már ismert „c” alakparaméter értékét és a beton-nyomószilárdság mérésekkel kapott tapasztalati szórásának az értékét (s_{test}), és implicit iterációval megkeressük a *Weibull*-eloszlás „b” skálaparaméterének a tapasztalati szóráshoz tartozó értékét:

$$s_{\text{Weibull,alsó}}(z|0;\mathrm{b};\mathrm{c}) = s_{test} = \mathrm{b}\times\sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{\mathrm{c}}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\mathrm{c}}\right)^2}$$

A fokozatos közelítés (iteráció) során különböző „b” értékek felvételével addig ismételjük a kétparaméteres alsó *Weibull*-eloszlás szórásának a kiszámítását, ameddig a tapasztalati szórás értékét legjobban (például három tizedesre) megközelítő értéket megkapjuk.

Ebben segítségünkre lehet

- a *2.* és a *3. ábra*, amelyeken a félig egyszerűsített, kétparaméteres alsó *Weibull*-eloszlás *z* független változója szórásának diagramjait a „b” skálaparaméter és a „c” alakparaméter függvényében ábrázoltuk, valamint
- a *4. ábra* és az *5. ábra*, amelyeken a félig egyszerűsített, kétparaméteres alsó *Weibull*-eloszlás *z* független változója szórással arányos

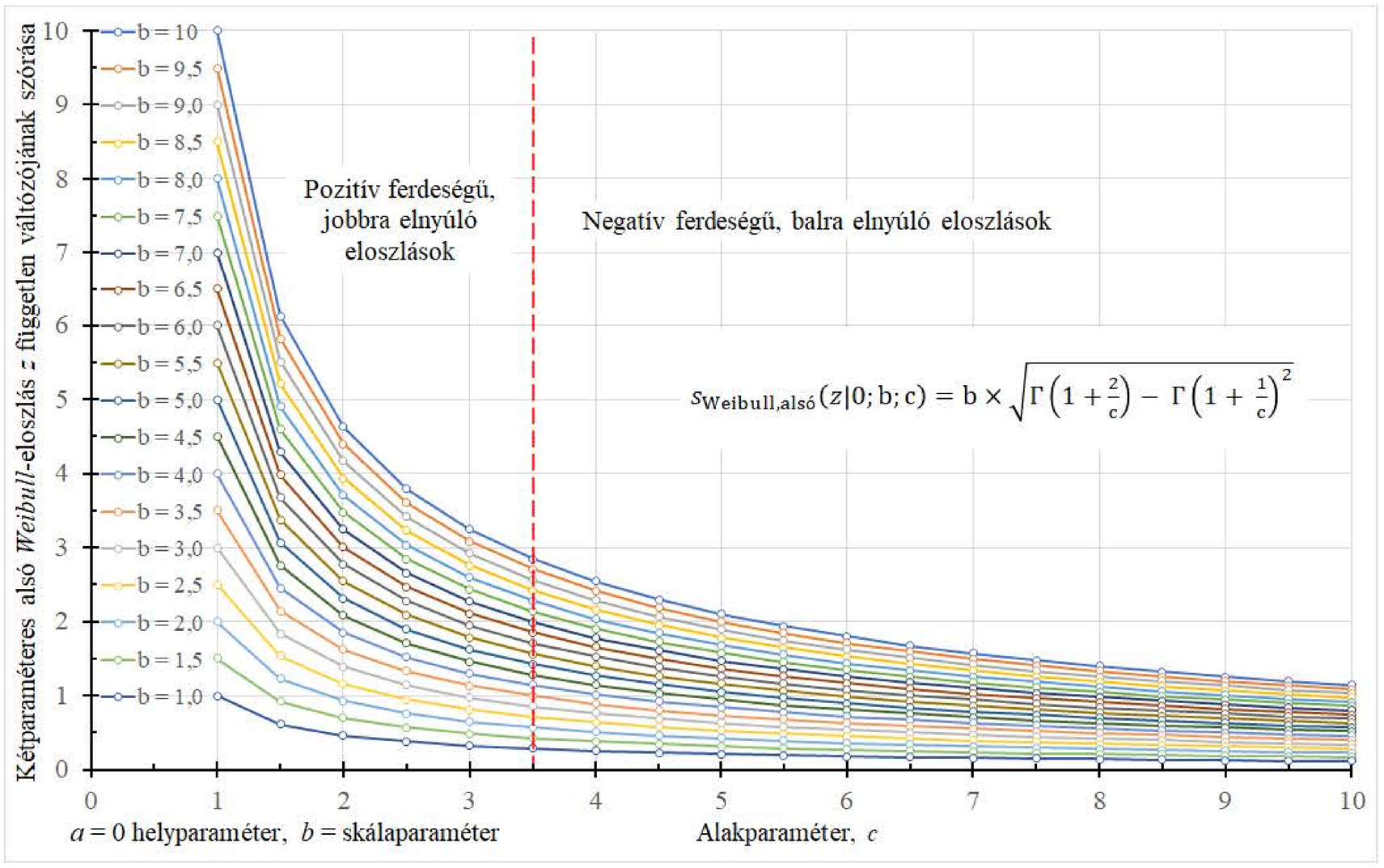
$$\sqrt{\psi_c} = \frac{s_{\text{Weibull,alsó}}}{b} = \sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)\right]^2}$$

szórás/skálaparaméter hányadosának diagramját, illetve a szórás/skálaparaméter hányados négyzetének

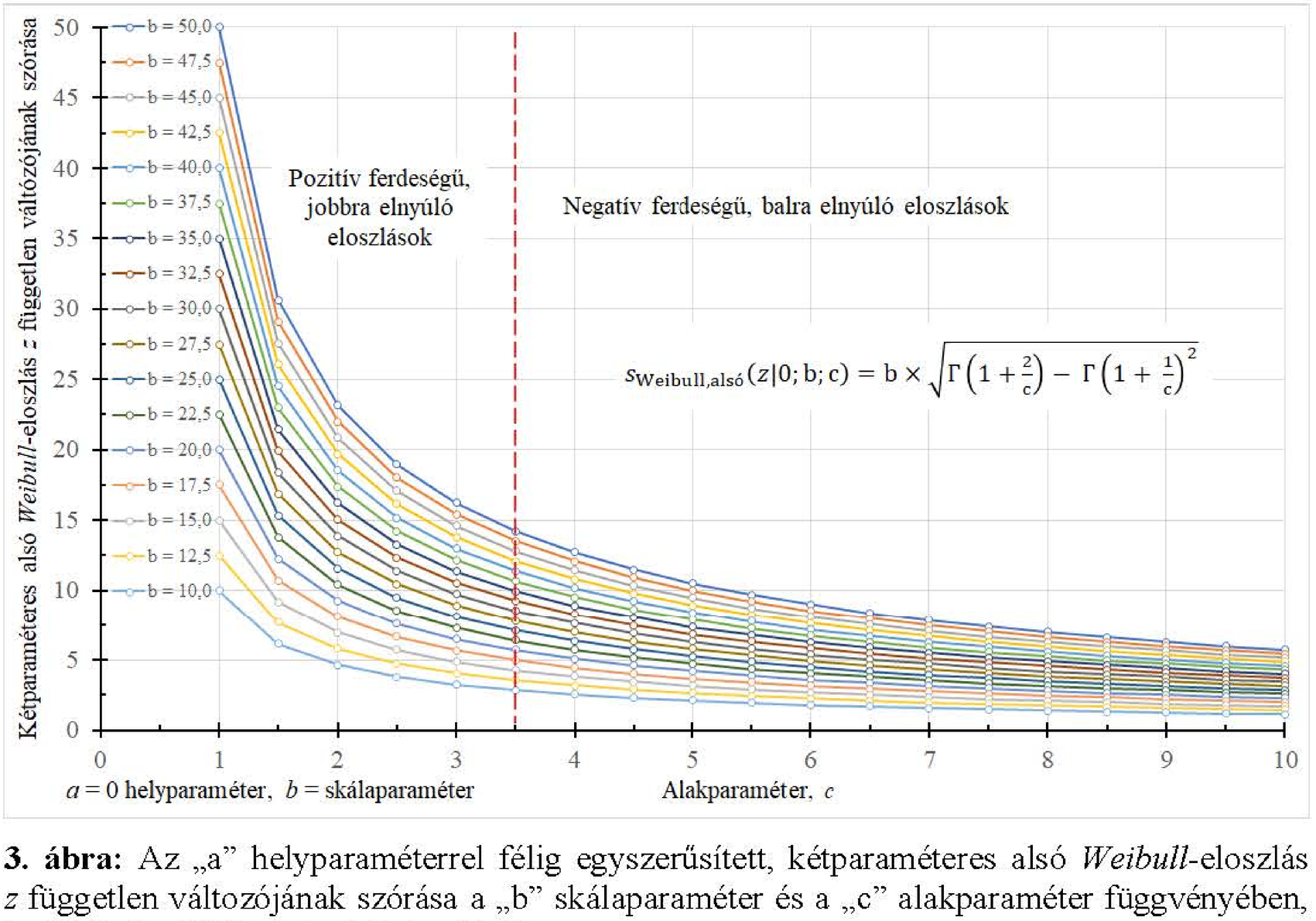
$$\psi_c = \left(\frac{s_{\text{Weibull,alsó}}}{b}\right)^2 = \Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)\right]^2$$

diagramját rajzoltuk meg.

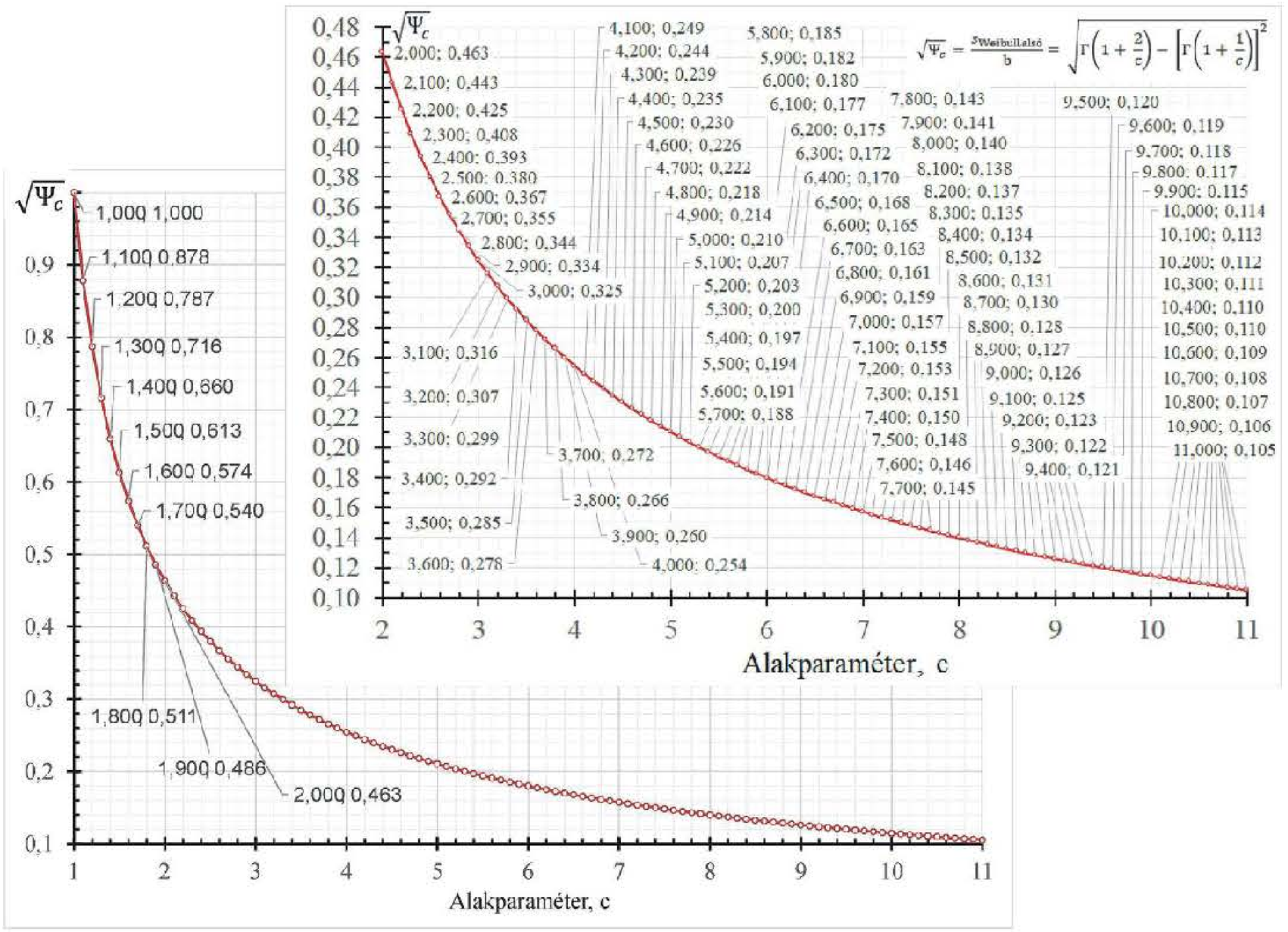
Ha szükséges, akkor a kiszámított „b” skálaparaméter felhasználásával a „c” alakparaméter értékét pontosítani lehet.



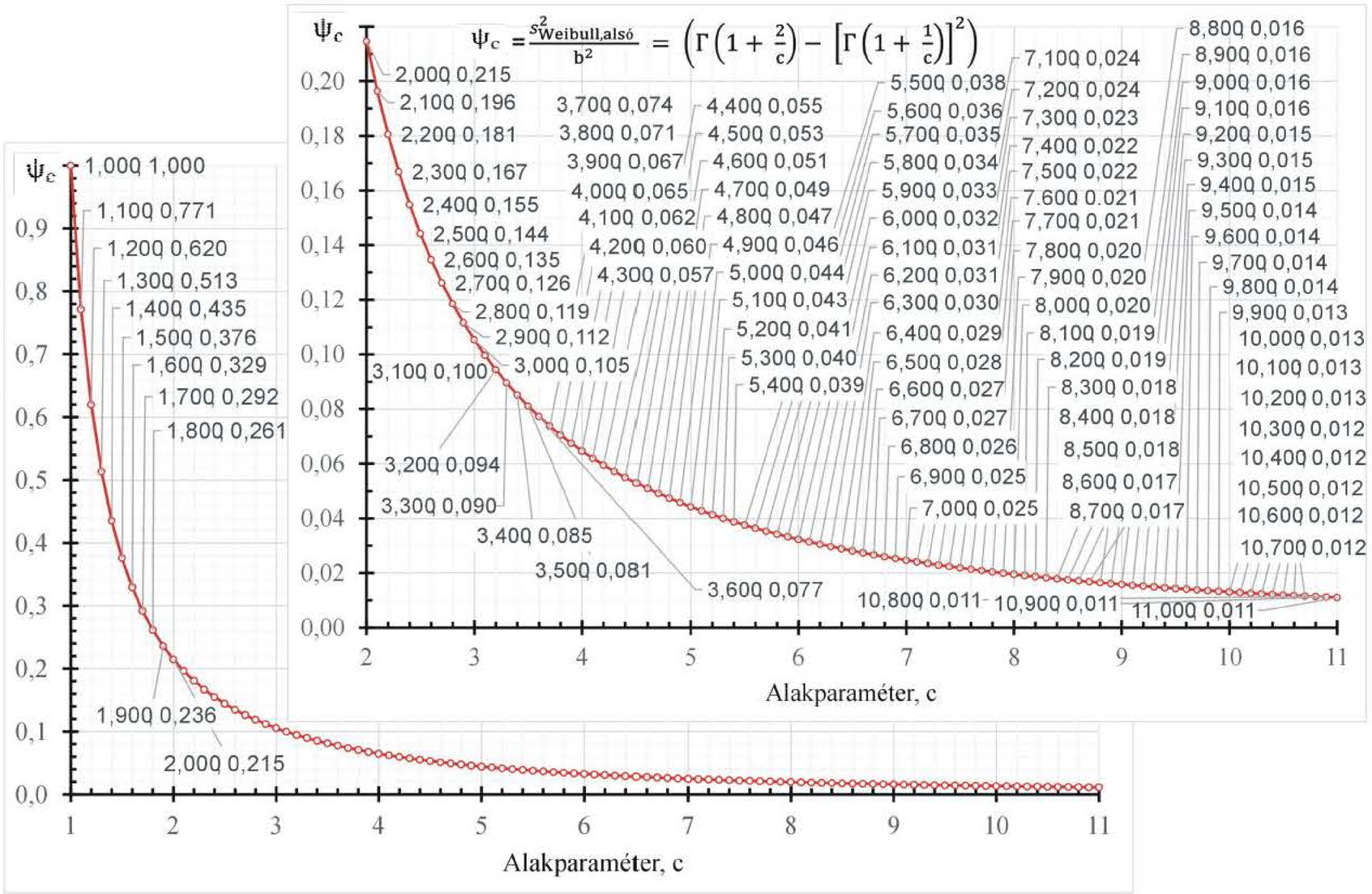
2. ábra: Az „a” helyparaméterrel félig egyszerűsített, kétparaméteres alsó *Weibull*-eloszlás *z* független változójának szórása a „b” skálaparaméter és a „c” alakparaméter függvényében, ha $1{,}0 \leq b \leq 10{,}0$ és ha $1{,}0 \leq c \leq 10{,}0$



3. ábra: Az „a” helyparaméterrel félig egyszerűsített, kétparaméteres alsó *Weibull*-eloszlás *z* független változójának szórása a „b” skálaparaméter és a „c” alakparaméter függvényében, ha $10{,}0 \leq \mathrm{b} \leq 50{,}0$ és ha $1{,}0 \leq \mathrm{c} \leq 10{,}0$



4. ábra: A félig egyszerűsített, kétparaméteres alsó *Weibull*-eloszlás szórással arányos $\sqrt{\Psi_c}$ szórás/skálaparaméter hányadosa a „c” alakparaméter függvényében



5. ábra: A félig egyszerűsített, kétparaméteres alsó *Weibull*-eloszlás szórásnégyzetével arányos négyzetre emelt $\sqrt{\Psi_c}$ szórás/skálaparaméter hányadosa (Ψ_c) a „c” alakparaméter függvényében

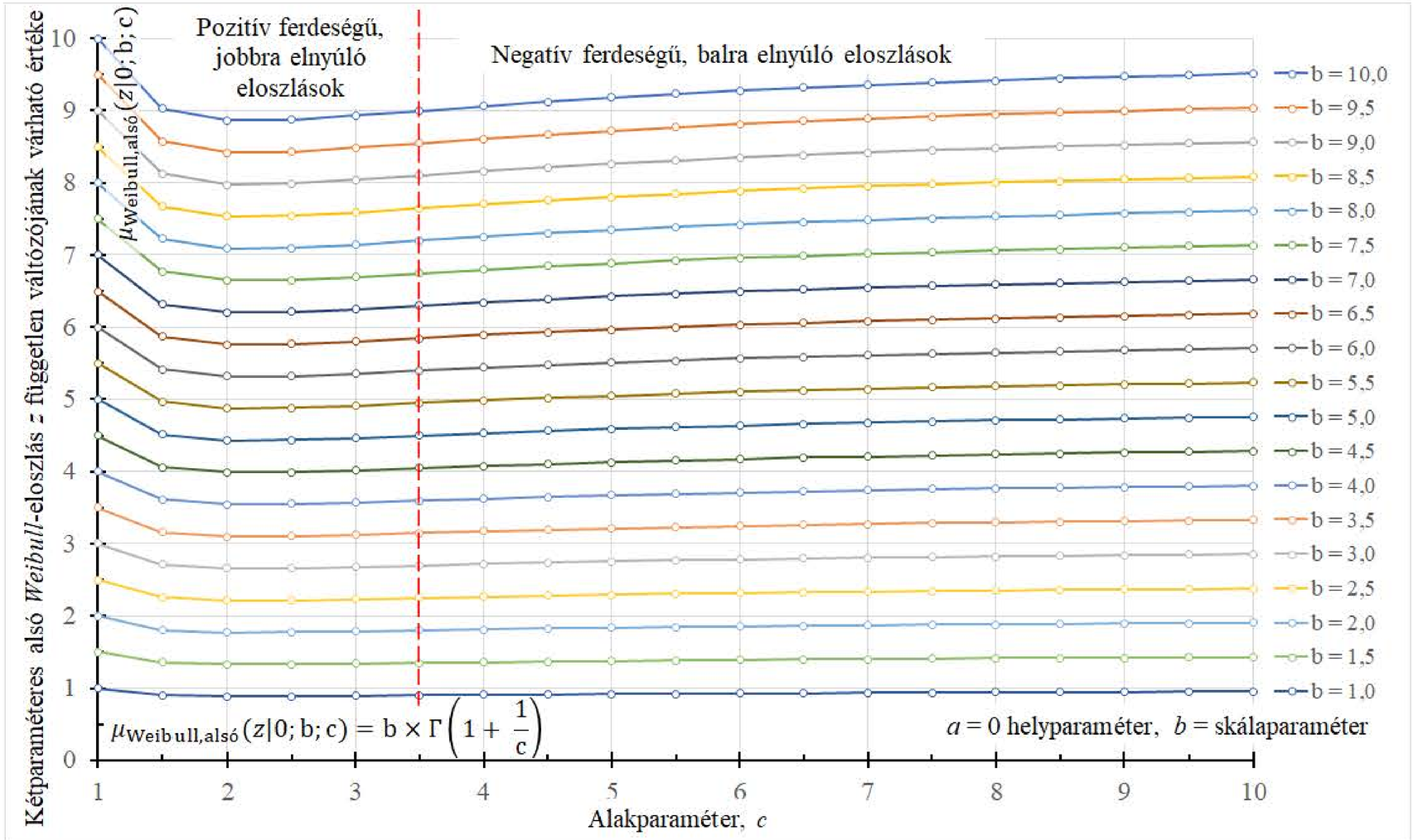
- Harmadik lépés: A már ismert „b” skálaparaméter és „c” alakparaméter felhasználásával implicit iterációval kiszámítjuk a kétparaméteres, félig egyszerűsített alsó *Weibull*-eloszlás $\mu_{\text{Weibull,alsó}}(z|0;b;c)$ várható értékét:

$$\mu_{\text{Weibull,alsó}}(z|0;b;c) = b \times \Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)$$

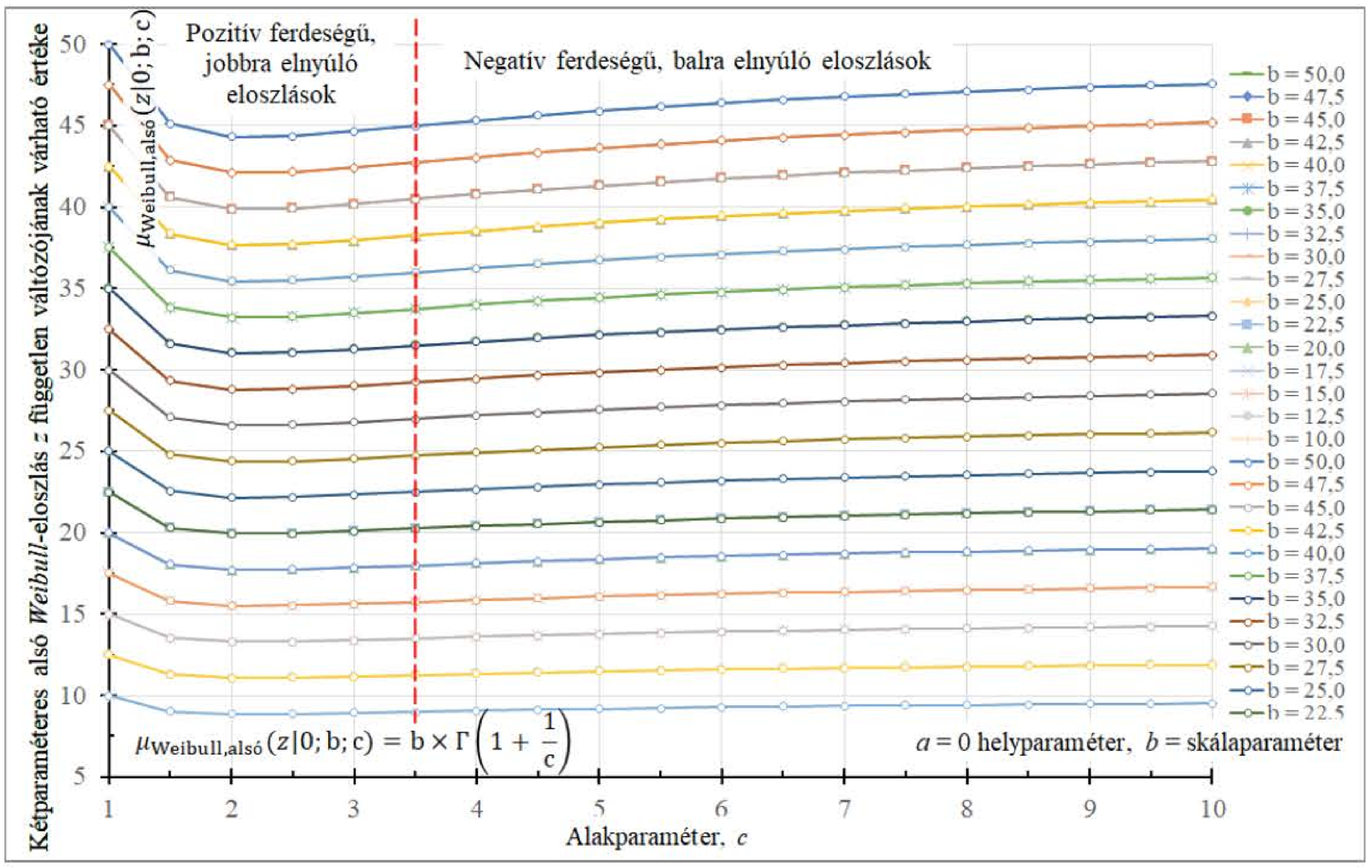
A kétparaméteres, félig egyszerűsített alsó *Weibull*-eloszlás $\mu_{\text{Weibull,alsó}}(z|0;b;c)$ várható értékének a „b” skálaparaméter és a „c” alakparaméter függvényében rajzolt diagramja a *6.* és a *7. ábrán* látható.

Az „a” helyparaméter értékét megkapjuk, ha alapvetésünknek megfelelően a kétparaméteres, félig egyszerűsített alsó *Weibull*-eloszlás kiszámított $\mu_{\text{Weibull,alsó}}(z|0;b;c)$ várható értékét a beton-nyomószilárdság mérési eredményeinek $f_{cm,test}$ tapasztalati átlagából kivonjuk:

$$a = f_{cm,test} - \mu_{\text{Weibull,alsó}}(z|0;b;c)$$

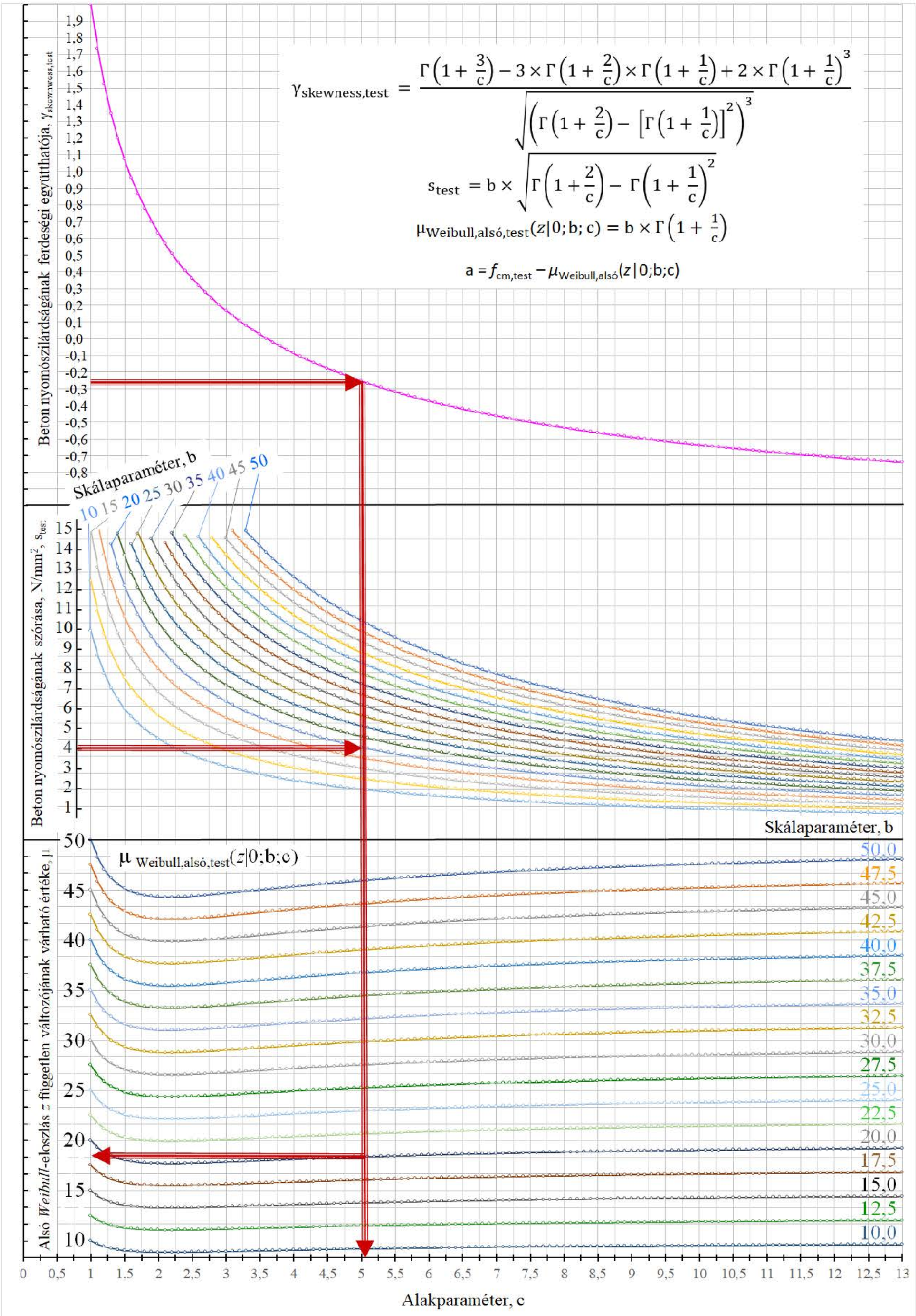


6. ábra: Az „a” helyparaméterrel félig egyszerűsített, kétparaméteres alsó *Weibull*-eloszlás z független változójának várható értéke a „b” skálaparaméter és a „c” alakparaméter függvényében, ha $1{,}0 \leq b \leq 10{,}0$ és ha $1{,}0 \leq c \leq 10{,}0$



7. ábra: Az „a” helyparaméterrel félig egyszerűsített, kétparaméteres alsó *Weibull*-eloszlás z független változójának várható értéke a „b” skálaparaméter és a „c” alakparaméter függvényében, ha $10{,}0 \leq b \leq 50{,}0$ és ha $1{,}0 \leq c \leq 10{,}0$

- Negyedik lépés: Az *1.* - *7. ábra* felhasználásával nomogramot lehet szerkeszteni (*8. ábra*), amelyen a *Weibull*-eloszlás paramétereinek számítási eredményei összefüggésükben jeleníthetők meg.



8. ábra: Nomogram az alsó *Weibull*-eloszlás paramétereinek meghatározásához

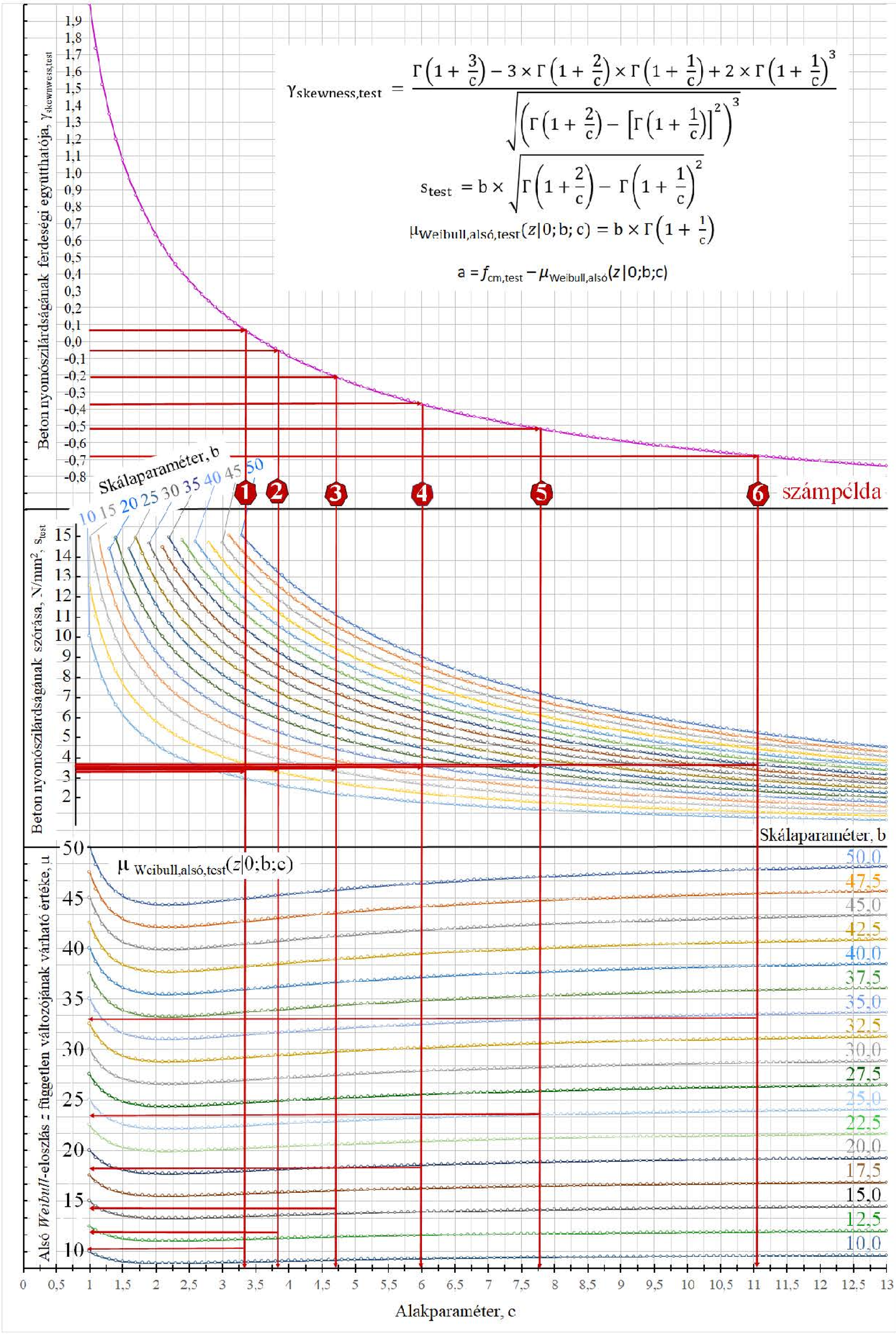
4. Számpélda a beton nyomószilárdságának értékelésére *Weibull*-eloszlással

A *Weibull*-eloszlás paramétereinek fenn javasolt számításmódjával számpéldákat oldottunk meg. A számpéldák kiindulási adata a beton nyomószilárdságának tapasztalati átlaga, tapasztalati szórása és tapasztalati ferdeségi együtthatója, a számítás főbb eredménye a kétparaméteres *Weibull*-eloszlás várható értéke, a helyparaméter, a skálaparaméter, az alakparaméter értéke, valamint a beton *Weibull*-eloszlású nyomószilárdságának tapasztalati jellemző értéke és tapasztalati alulmaradási tágassága (*2. táblázat*).

2. táblázat: Számpéldák a *Weibull*-féle alsó harmadik extrémérték-eloszlás betonanyagtani alkalmazására

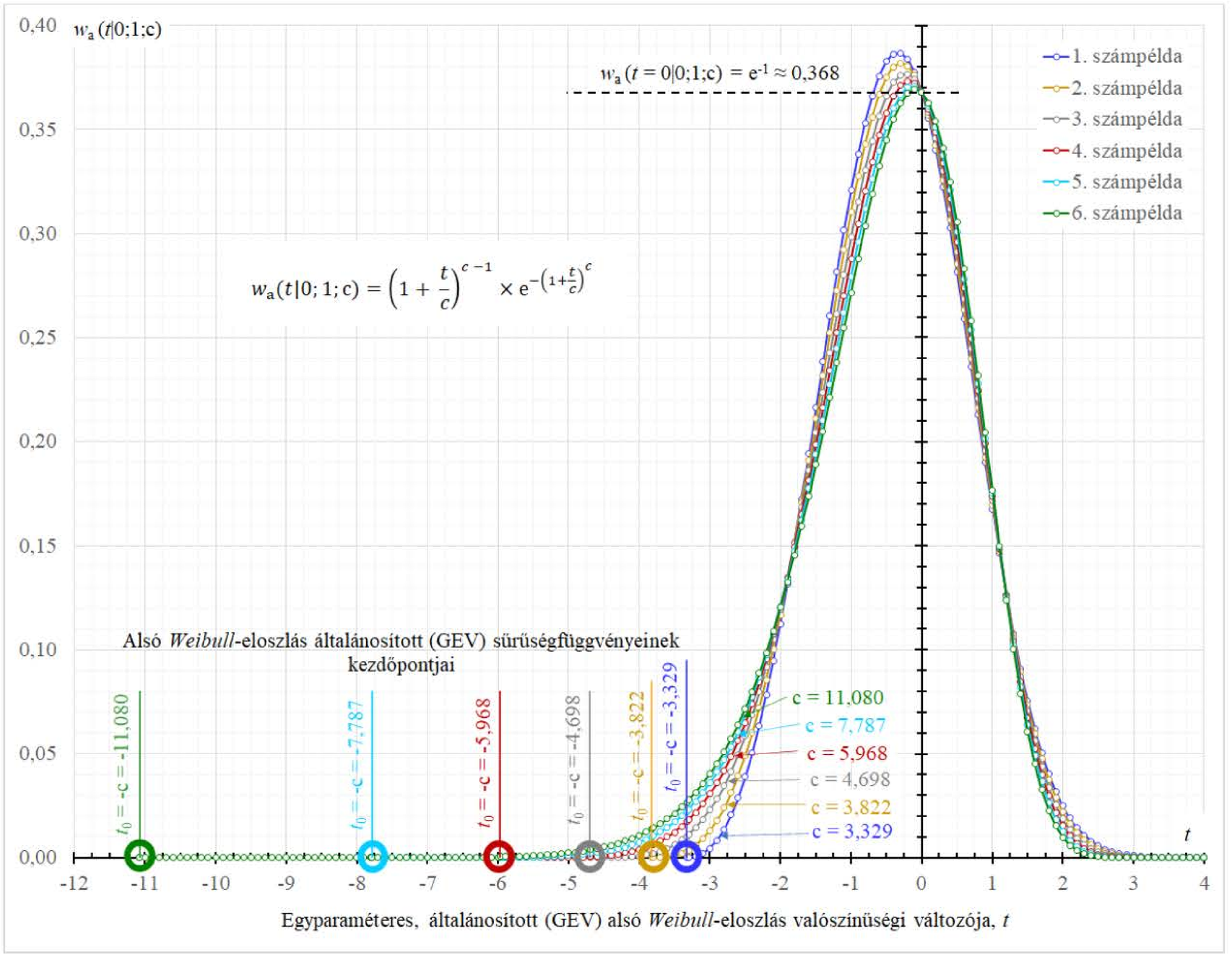
A SZÁMPÉLDA JELE					
1.	2.	3.	4.	5.	6.
A SZÁMPÉLDÁK RÉGEBBI KÍSÉRLETI EREDMÉNYEKEN ALAPULÓ KIINDULÁSI ADATAI					
A beton nyomószilárdsági osztálya, MSZ EN 1992-1-1:2010					
C16/20	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50
A beton nyomószilárdságának tapasztalati átlaga, N/mm^2, $f_{cm,cyl,test}$ MSZ EN 1992-1-1:2010					
24	28	33	38	43	48
A beton nyomószilárdságának tapasztalati szórása, N/mm^2, s_{test}					
3,40	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65
A beton nyomószilárdságának tapasztalati relatív szórása, $s_{rel,test}$					
0,142	0,123	0,106	0,093	0,084	0,076
A beton nyomószilárdságának tapasztalati ferdeségi együtthatója, $\gamma_{skewness,test}$					
+0,07	-0,05	-0,21	-0,37	-0,52	-0,68
A SZÁMÍTÁS EREDMÉNYE					
Az egyparaméteres, egyszerűsített *Weibul*l-eloszlás várható értéke, $\mu_{\mathrm{Weibull}}(u\|0;1;c)$					
0,897	0,904	0,915	0,927	0,941	0,955
A kétparaméteres, félig egyszerűsített *Weibull*-eloszlás várható értéke, $\mu_{\mathrm{Weibull}}(z\|0;b;c)$					
10,271	11,802	14,436	18,230	23,660	33,430
A *Weibull*-eloszlás helyparamétere, a					
13,729	16,198	18,564	19,770	19,340	14,570
A *Weibull*-eloszlás skálaparamétere, b					
11,445	13,054	15,780	19,656	25,157	34,992
A *Weibull*-eloszlás alakparamétere, c					
3,329	3,822	4,698	5,968	7,787	11,080
A beton *Weibull*-eloszlású nyomószilárdságának tapasztalati jellemző értéke (5%-os karakterisztikus értéke), N/mm^2, $f_{ck,test}$					
18,419	22,199	26,939	31,720	36,519	41,334
A beton *Weibull*-eloszlású nyomószilárdságának tapasztalati alulmaradási tágassága, N/mm^2, $f_{cm,test} - f_{ck,test}$					
5,581	5,801	6,061	6,280	6,481	6,666
A számpélda szerint alulmaradási tényező (tapasztalati alulmaradási tágasság / tapasztalati szórás)					
1,641	1,681	1,732	1,769	1,800	1,826

A számpéldák megoldásának folyamatát a *9. ábra* szemlélteti.

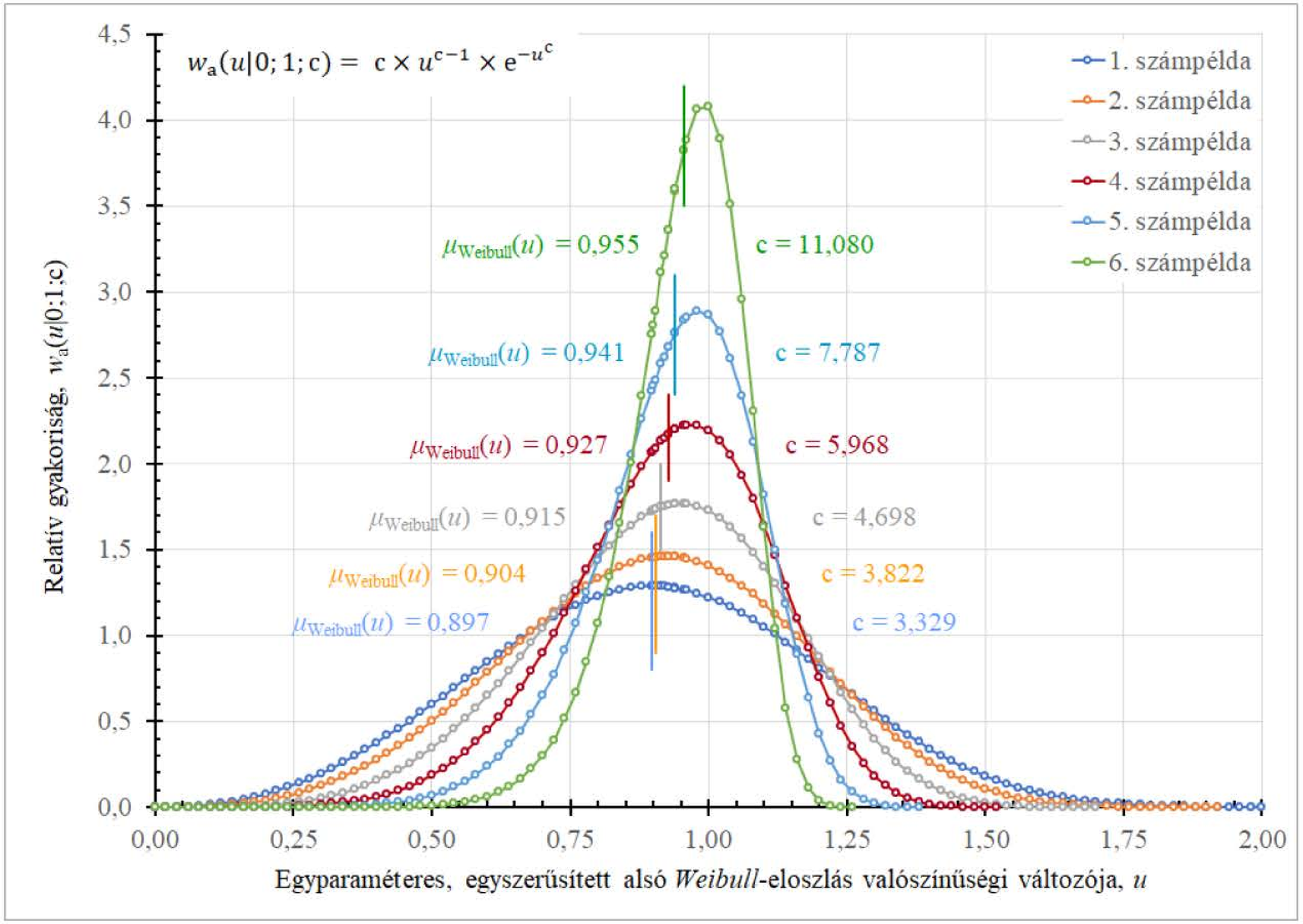


9. ábra: A számpéldák megoldásának folyamatának szemléltetése nomogramon

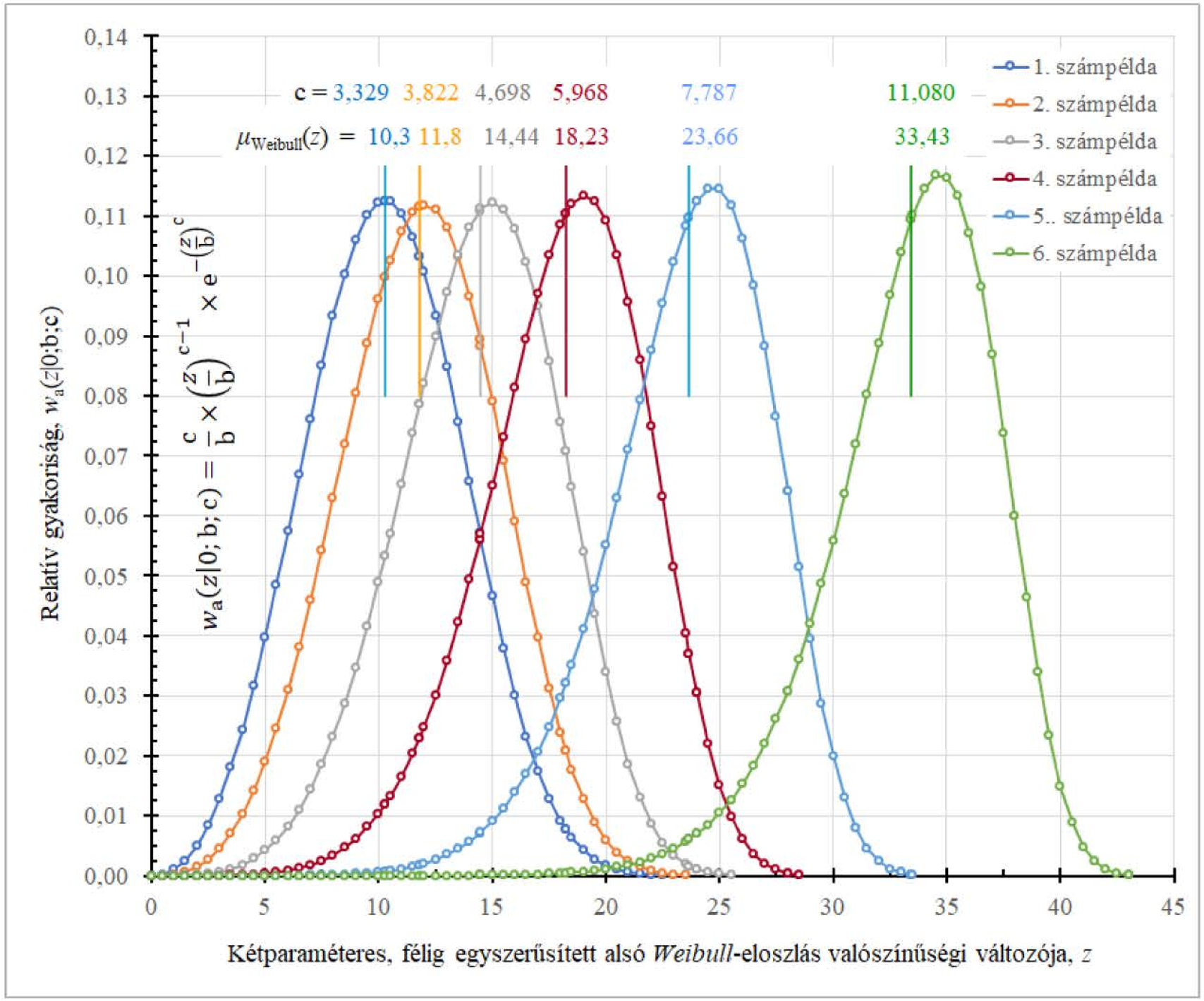
A számpéldák kiszámított adatainak a felhasználásával megrajzoltuk az alsó *Weibull*-eloszlás egyparaméteres, általánosított (GEV, Generalized extreme value distribution) sűrűségfüggvényének (*10. ábra*), egyparaméteres, egyszerűsített sűrűségfüggvényének (*11. ábra*), kétparaméteres, félig egyszerűsített sűrűségfüggvényének (*12. ábra*), továbbá az alsó *Weibull*-eloszlású beton-nyomószilárdság háromparaméteres sűrűségfüggvényének (*13. ábra*) és háromparaméteres eloszlásfüggvényének görbéit (*14. ábra*).



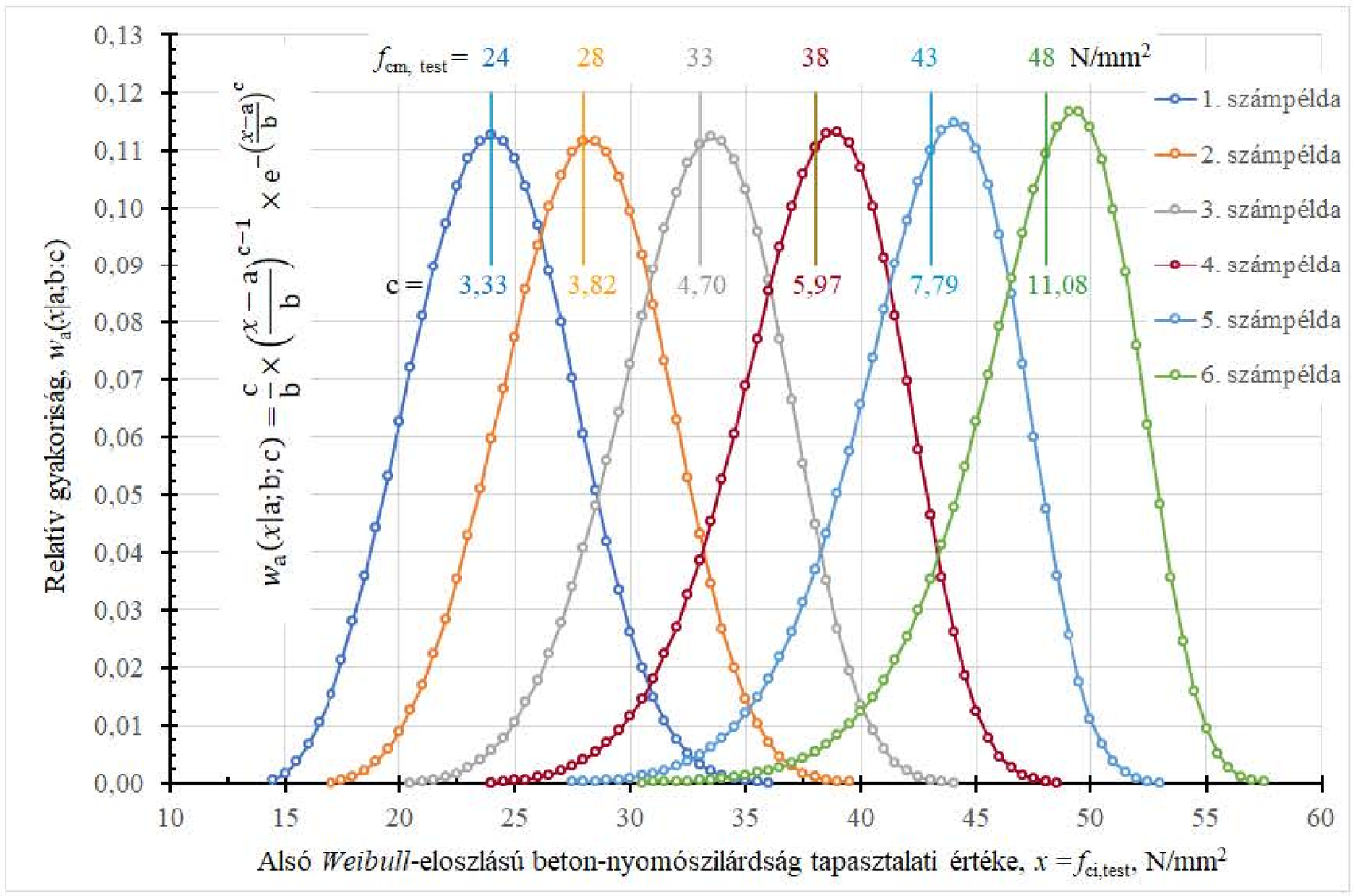
10. ábra: A számpélda-megoldás első lépésének diagramjai. Az alsó *Weibull*-eloszlás egyparaméteres, általánosított (GEV) sűrűségfüggvényének görbéi



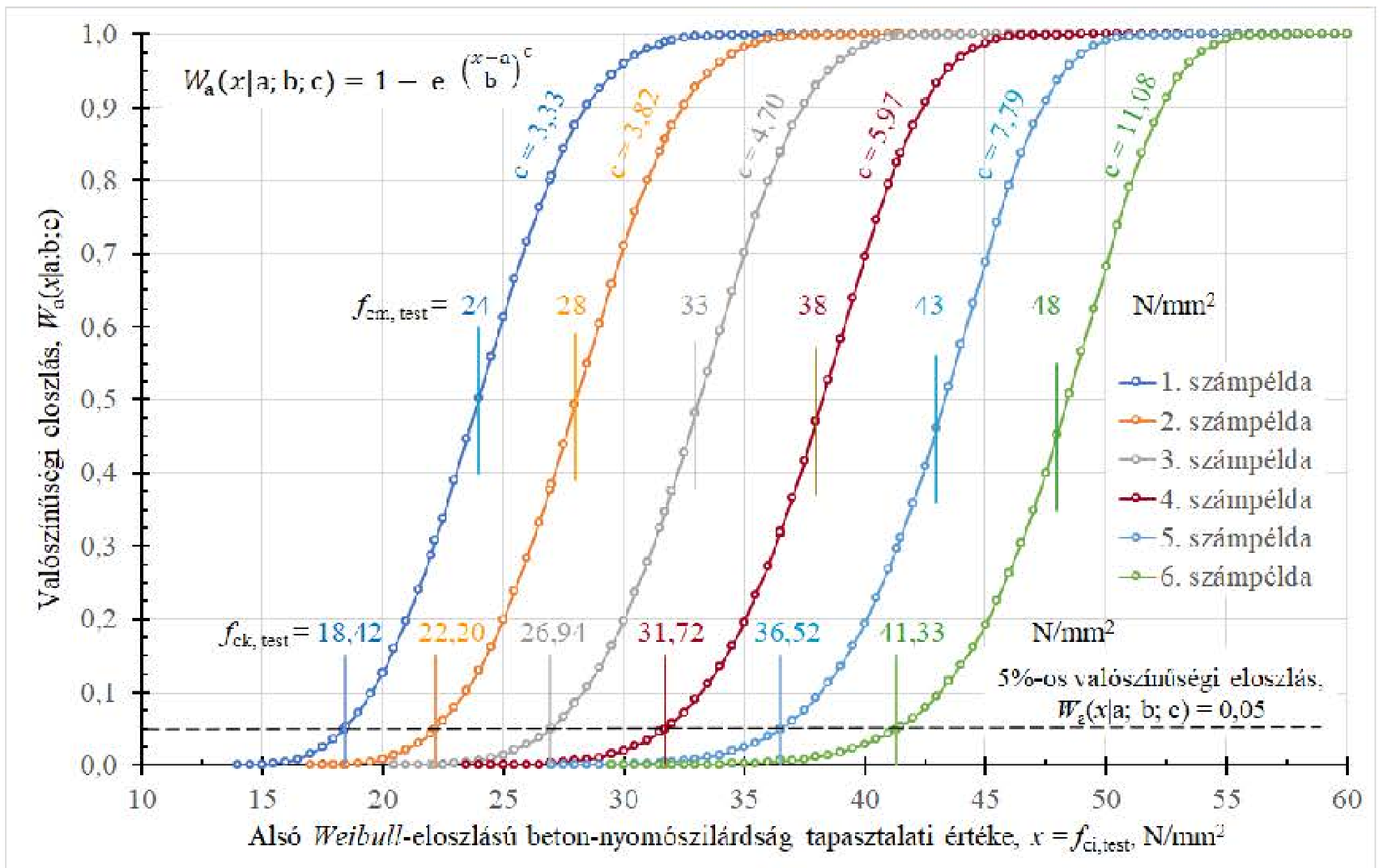
11. ábra: A számpélda-megoldás első lépésének diagramjai. Az alsó *Weibull*-eloszlás egyparaméteres, egyszerűsített sűrűségfüggvényének görbéi



12. ábra: A számpélda-megoldás második lépésének diagramjai. Az alsó *Weibull*-eloszlás kétparaméteres, félig egyszerűsített sűrűségfüggvényének görbéi



13. ábra: A számpélda-megoldás harmadik lépésének diagramjai. Az alsó *Weibull*-eloszlású beton-nyomószilárdság háromparaméteres sűrűségfüggvényének görbéi



14. ábra: A számpélda-megoldás harmadik lépésének diagramjai. Az alsó *Weibull*-eloszlású beton-nyomószilárdság háromparaméteres eloszlásfüggvényének görbéi

A *14. ábrán* a számpéldák alsó *Weibull*-eloszlású beton-nyomószilárdságának 5%-os tapasztalati jellemző értékét (karakterisztikus értékét) is feltüntettük. A nyomószilárdság tapasztalati alulmaradási tágassága a tapasztalati átlag ($f_{cm,test}$) és a tapasztalati jellemző érték ($f_{ck,test}$) különbsége ($f_{cm,test} - f_{ck,test}$), amelynek értéke számpéldáinkban az 5,5 N/mm^2 értéket, az MSZ EN 1992-1-1:2010 szabvány szerinti, legalább C25/30 nyomószilárdsági osztályokban a 6 N/mm^2 értéket meghaladja (*2. táblázat*).

Ha a vizsgált próbatestek n számát is figyelembe vesszük, akkor az alulmaradási tágasság a t_n/1,645 hányadossal megszorzandó, ahol t_n *a Student*-tényező értéke (MSZ 4798:2016), (*Federighi,* 1959), (*Stange* et al., 1966), és amely hányados értéke például n = 3 próbatest esetén 2,92/1,645 = 1,775, vagy n = 5 próbatest esetén 2,132/1,645 = 1,296, vagy n = 15 esetén 1,761/1,645 = 1,071, vagy n = 35 esetén 1,691/1,645 = 1,028.

5. Megállapítás

A *2. táblázat* utolsó előtti sora alapján megállapíthatjuk, hogy a beton – a maga valóságában ferde eloszlású – nyomószilárdságának az alsó *Weibull*-eloszlással számított alulmaradási tágassága sokkal nagyobb, mint az MSZ EN 206:2013+A2:2021 szabvány kezdeti gyártásra vonatkozó 8.2.1.3.2./„A módszer" szakasza szerinti 4 N/mm^2, illetve folyamatos gyártásra vonatkozó 8.2.1.3.2./„B módszer" szakasza szerinti 1,48×σ_{test} N/mm^2 érték.

Ebből is következik, hogy az MSZ EN 206:2013+A2:2021 betonszabvány és az ezt követő MSZ4798:2016 magyar termékszabvány szerinti, valamely adott jelű (például C40/50) beton valójában kisebb átlagos nyomószilárdságú – amely átlagos nyomószilárdság a betonösszetétel tervezésének alapja –, mint amekkora átlagos nyomószilárdságot az Eurocode (MSZ EN 1990:2011) és az Eurocode 2 (MSZ EN 1992-1-1:2010, MSZ EN 1992-2:2009, MSZ EN 1992-3:2011) tervezési szabványokban az ugyanilyen betonjelhez tartozóan számításba vesznek. (http://www.betonopus.hu/notesz/ac50-ajanlas.pdf), (*Kausay*, 2006), (*Kausay* et al., 2007)

Ez az alulmaradási tényezőkben egyébként is meglévő kedvezőtlen különbség (például 1,48 használata az 1,645 helyett) a nagyobb nyomószilárdságú betonok esetén a valóságban még egyre tovább növekszik, miként azt a betonszilárdságok valóságos ferdeségét követő *Weibull*-eloszlással e dolgozatban kimutattuk.

A beton-nyomószilárdság vizsgálati eredményeinek értékelése az aszimmetriát jól kifejező alsó *Weibull*-eloszlással a beton- és vasbetonszerkezeteink biztonságát és tartósságát szolgálná; hasonlóképpen ahhoz, ahogy azt eleink 24 éven át az alulmaradási tágasságot kifejező k×t_n×s szorzatban lévő – a nyomószilárdság átlagától függő – k ferdeségi tényezőnek a 2004-ben visszavont MSZ 4720-2:1980 szabványban való alkalmazásával szolgálták.

Mindent egybevetve megállapíthatjuk, hogy az alsó *Weibull*-eloszlás kiváló eszköz a beton nyomószilárdsága jellemző értékének (karakterisztikus értékének) – az egyedi nyomószilárdság vizsgálati eredmények eloszlásának ferdeségét figyelembe vevő – meghatározására.

HIVATKOZOTT SZABVÁNYOK

DIN 1055-100:2001	Einwirkungen auf Tragwerke. Teil 100: Grundlagen der Tragwerksplanung. Sicherheitskonzept und Bemessungsregeln. Visszavont szabvány
MSZ EN 206:2013+A2:2021	Beton. Műszaki követelmények, teljesítőképesség, készítés és megfelelőség
MSZ EN 1990:2011	Eurocode: A tartószerkezetek tervezésének alapjai. Módosították: MSZ EN 1990:2002/A1:2008 jel alatt
MSZ EN 1992-1-1:2010	Eurocode 2: Betonszerkezetek tervezése. 1-1. rész: Általános és az épületekre vonatkozó szabályok. Módosították: MSZ EN 1992-1-1:2004/A1:2016 jel alatt
MSZ EN 1992-2:2009	Eurocode 2: Betonszerkezetek tervezése. 2. rész: Betonhidak. Tervezési és szerkesztési szabályok
MSZ EN 1992-3:2011	Eurocode 2: Betonszerkezetek tervezése. 3. rész: Folyadéktartályok és tárolószerkezetek
MSZ 4720-2:1980	A beton minőségének ellenőrzése. 2. rész: Általános tulajdonságok ellenőrzése. Visszavont szabvány
MSZ 4798:2016	Beton. Műszaki követelmények, tulajdonságok, készítés és megfelelőség, valamint az EN 206 alkalmazási feltételei Magyarországon. Módosították: MSZ 4798:2016/1M:2017 és MSZ 4798:2016/2M:2018 jel alatt

FELHASZNÁLT IRODALOM

Braml, Th.: Zur Beurteilung der Zuverlässigkeit von Massivbrücken auf der Grundlage der Ergebnisse von Überprüfungen am Bauwerk. Dissertation. Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München. München, 2010.

Federighi, E. T.: Extended tables of the percentage points of Student's *t*-distribution. Journal of the American Statistical Association. Vol. 54. 1959. pp. 683-688.

Hartung, J. – Elpelt, B. – Klösener, K.-H.: Statistik. Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. München, 2009.

Kausay T.: A beton nyomószilárdságának elfogadása. Vasbetonépítés. VIII. évfolyam. 2006. 2. szám, pp. 35-44. http://fib.bme.hu/folyoirat/vb/vb2006_2.pdf

Kausay T. – Simon T. K.: Acceptance of concrete compressive strength. Concrete Structures. Vol. 8. 2007. No. 4., pp. 54-63. http://www.betonopus.hu/some/acceptance.pdf

Mistéth E.: Erőtani méretezés valószínűségelméleti alapon. Építésügyi Minőségellenőrző Intézet kiadványsorozata. 23. szám. Építésügyi Tájékoztatási Központ. Budapest, 1974.

Mistéth E.: Építőanyagok küszöbszilárdságának valószínűségi sűrűségfüggvénye. Kézirat. Építéstudományi Intézet. Budapest, 1977.

Mistéth E.: A keresztmetszeti mennyiség valószínűségelméleti alapon való meghatározása. Vasbetonépítés. 2. évfolyam. 2000. 4. szám, pp. 106-111.

Mistéth E.: Méretezéselmélet. Akadémiai Kiadó. Budapest, 2001.

Palotás L.: Mérnöki szerkezetek anyagtana 1. Általános anyagismeret. Akadémiai Kiadó. Budapest, 1979.

Rinne, H.: The Weibull Distribution. A Handbook. CRC Press. Boca Raton (Florida). London, New York, 2009.

Stange, K. – Henning, H.-J.: Graf/Henning/Stange. Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. Springer-Verlag. Berlin/Heidelberg/New York, 1966.

Ujhelyi J.: A betonok szilárdsági szórásának és a szilárdság valószínű eloszlásának a vizsgálata. Kézirat. Az Építéstudományi Intézet kutatási jelentése. Budapest, 1978. http://www.betonopus.hu/notesz/ujhelyi/13-ujhelyi-1978-szoras.pdf

Ujhelyi J.: Betontechnológia I. Vízépítési segédletek. Vízdok. Budapest, 1985. http://www.betonopus.hu/notesz/ujhelyi/14-ujhelyi-1985-vizepitesi-segedlet.pdf

Weibull, E. H. W.: A Statistical Theory of the Strength of Material. Ingeniars Vetenskaps Akademiens Handligar. No. 151. Royal Swedish Institute for Engineering Research. Stockholm, 1939./a.

Weibull, E. H. W.: The Phenomenon of Rupture in Solids. Ingeniars Vetenskaps Akademiens Handligar. No. 153. Royal Swedish Institute for Engineering Research. Stockholm, 1939./b.

Weibull, E. H. W.: A Statistical Distribution Function of Wide Application. Journal of Applied Mechanics. 18. 1951. p. 293-297.

Weibull, E. H. W.: A Statistical Distribution Function of Wide Application. Journal of Applied Mechanics. Vol. 19. 1952. p. 233-234.

Weibull, E. H. W.: References on Weibull Distribution, FTLA Report. Forsvarets Teletekniska Laboratorium. Stockholm, 1977.

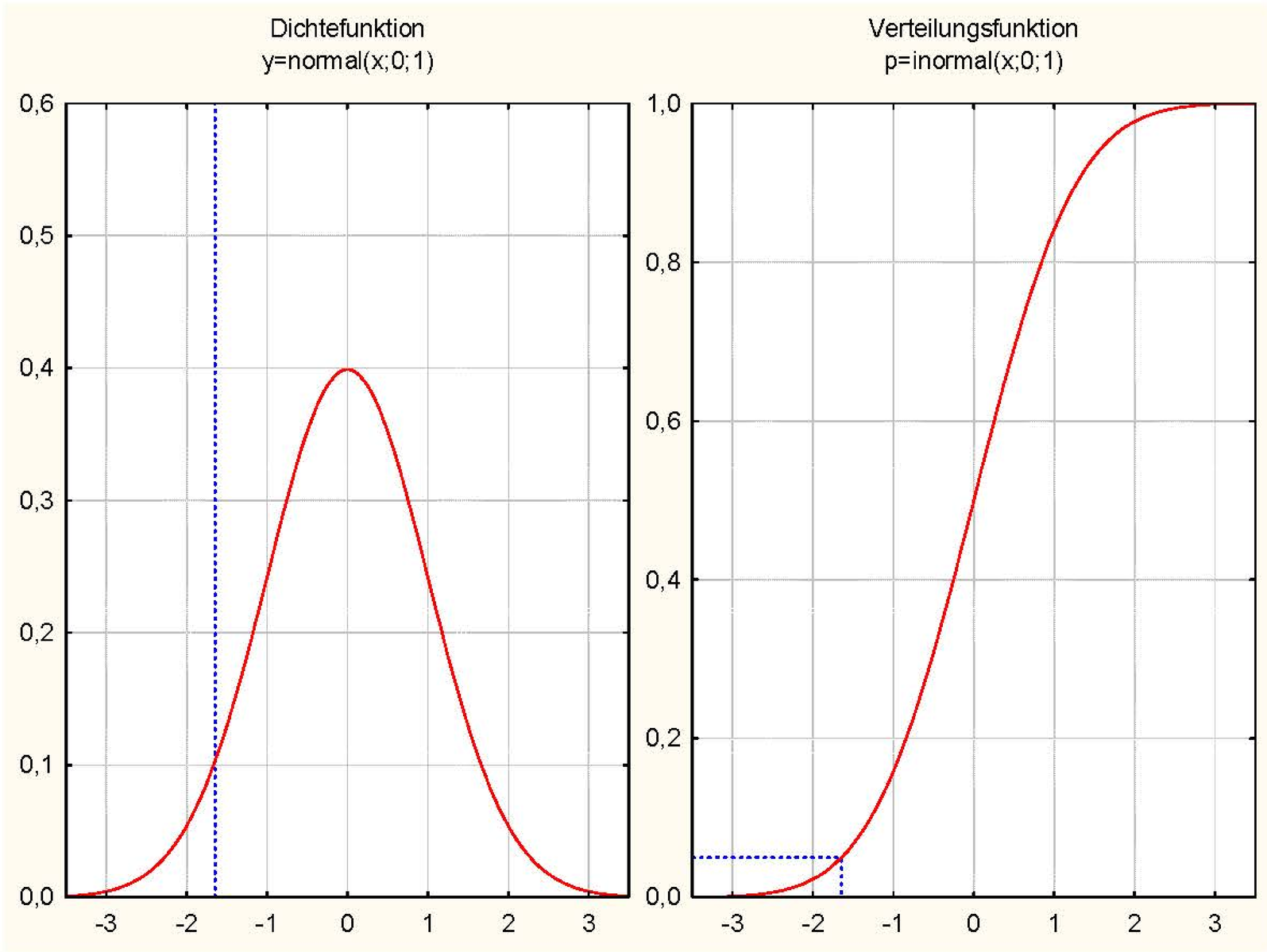
MEGJEGYZÉS:

- Az extrémérték-eloszlásról (extremális-eloszlásról) és a *Weibull*-eloszlásról részletesebben az elektronikus Betonos[e]könyv lapjain lehet olvasni:
  http://www.betonos-e-konyv.hu/book.php?pdf=betekon-101-6-4.pdf&fb3d-page=1
- A dolgozat angol nyelvű változata megjelent a *fib* Nemzetközi Betonszövetség Magyar Tagozata „Concrete Structures" című folyóirata 2022. évi számának (23. évfolyam) 11-22. oldalán: http://fib.bme.hu/folyoirat/cs/cs2022/cs2022_3.pdf, (https://doi.org/10.32970/CS.2022.1.3)

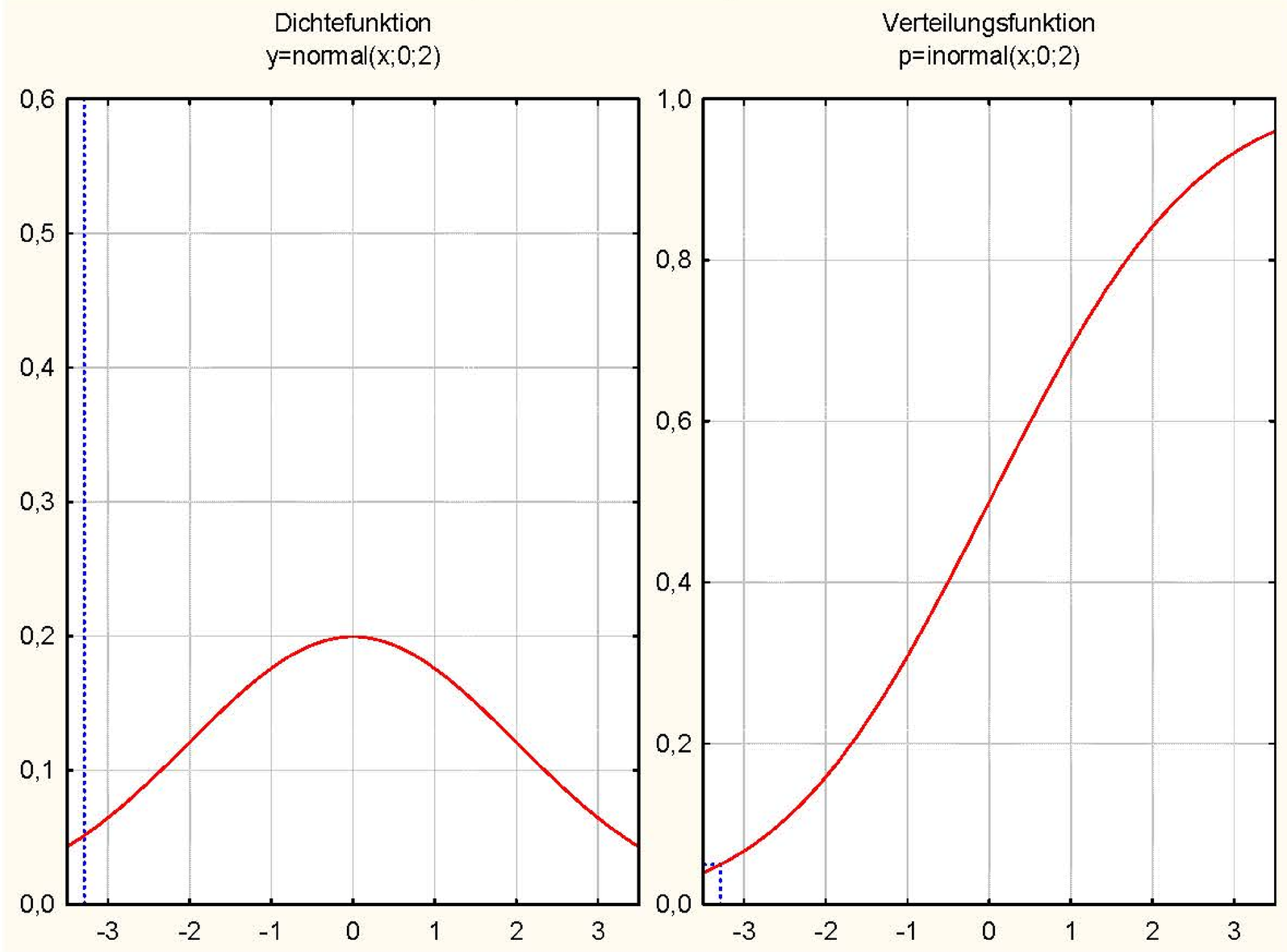
Vissza a

Noteszlapok abc-ben **Noteszlapok tárgykörönként**

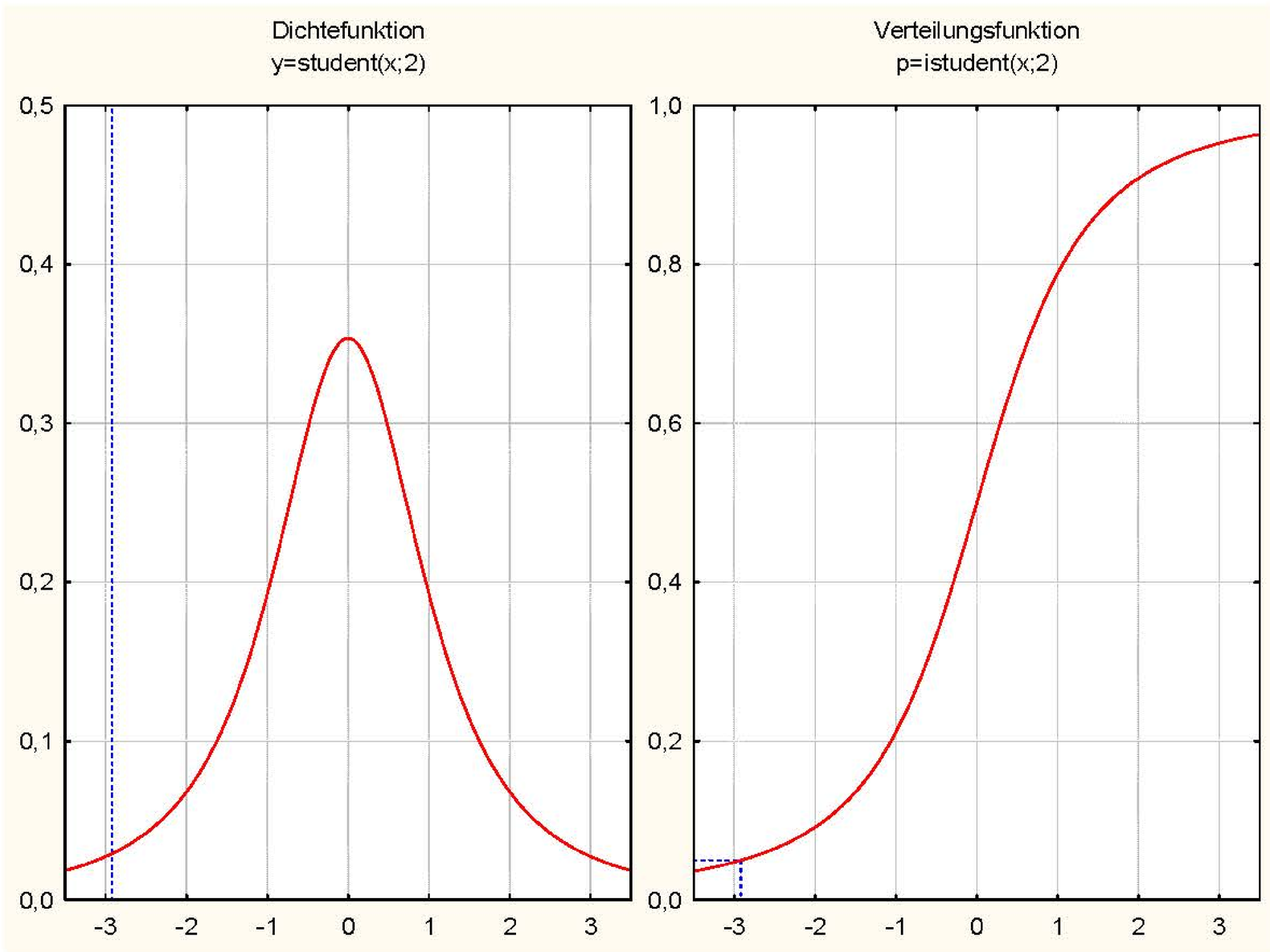
tartalomjegyzékhez



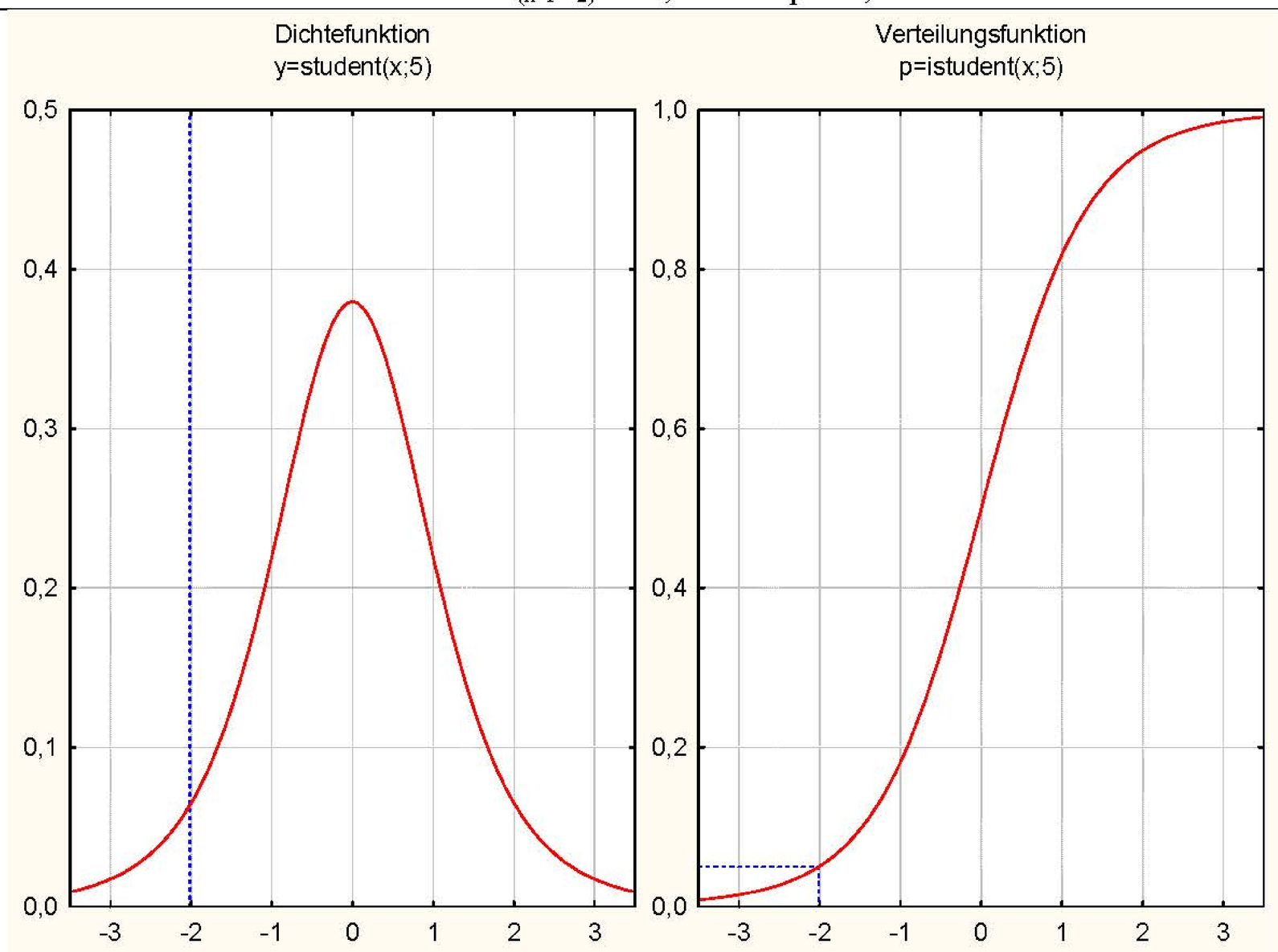
$Z(0,1) = -1,64485 \quad p = 0,05$



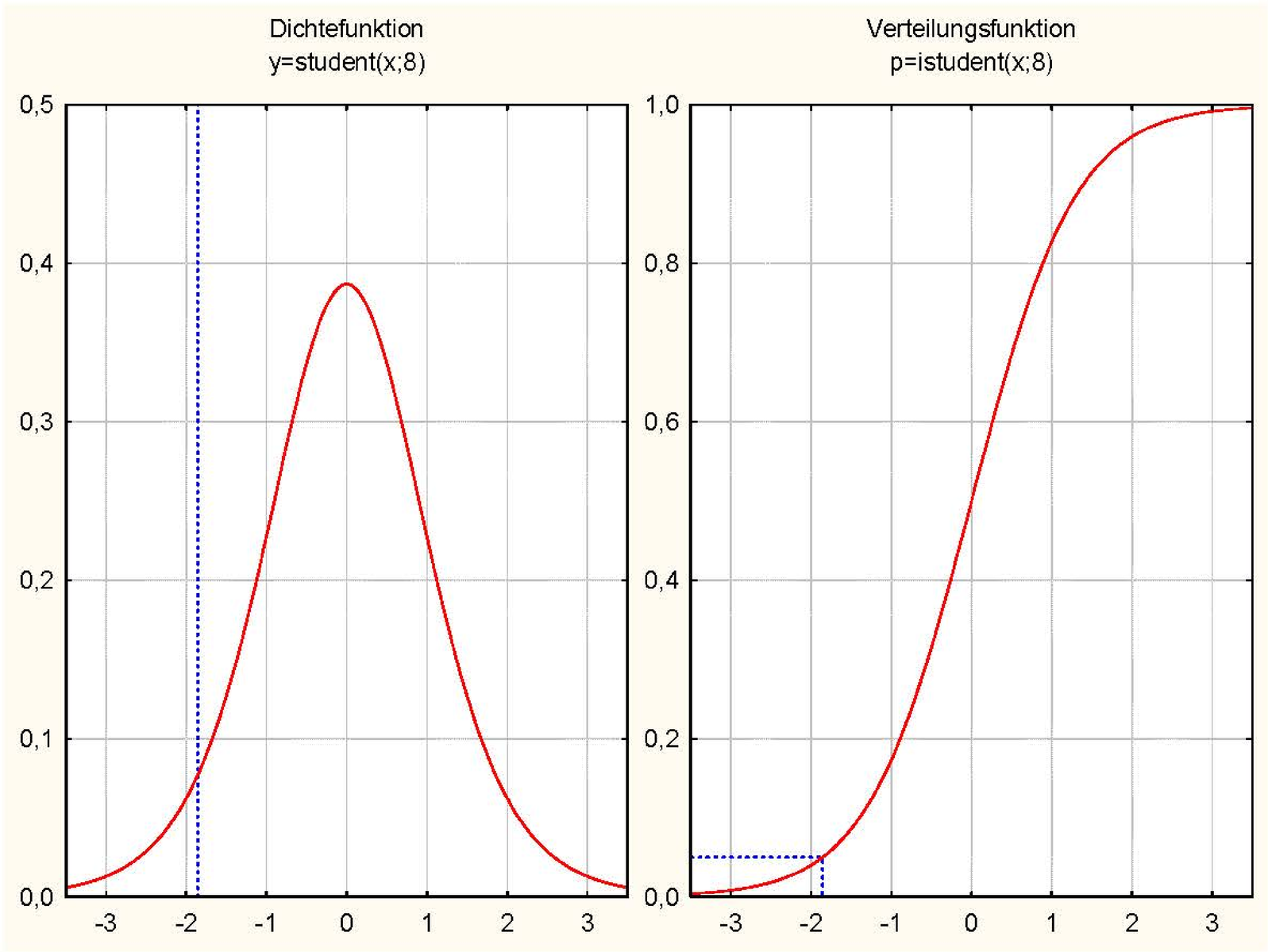
$Z(0,2) = -3,28971 = 2 \cdot (-1,644854) \quad p = 0,05$



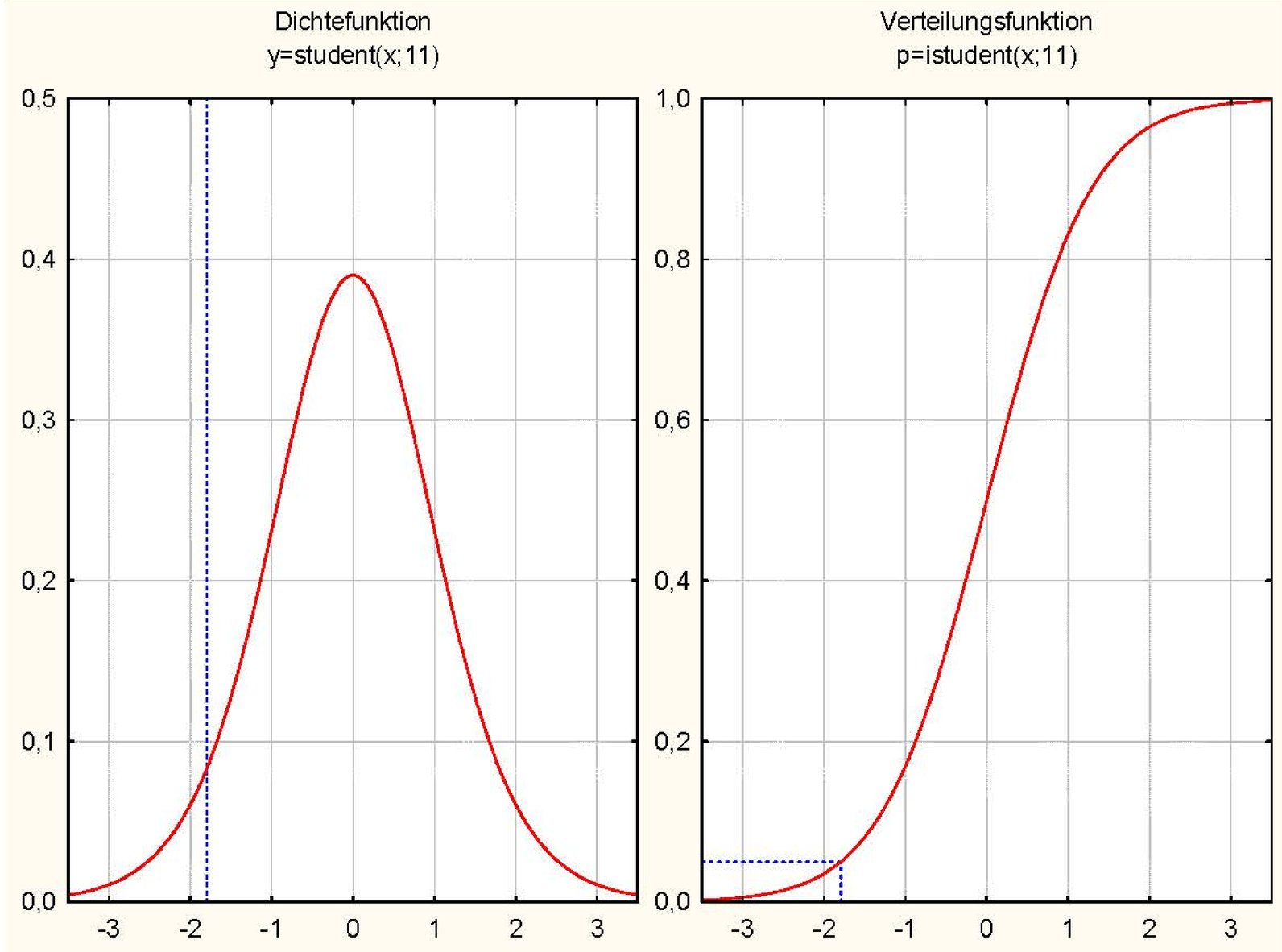
$n = 3 \rightarrow t_{(n-1=2)} = -2{,}91999 \quad p = 0{,}05$



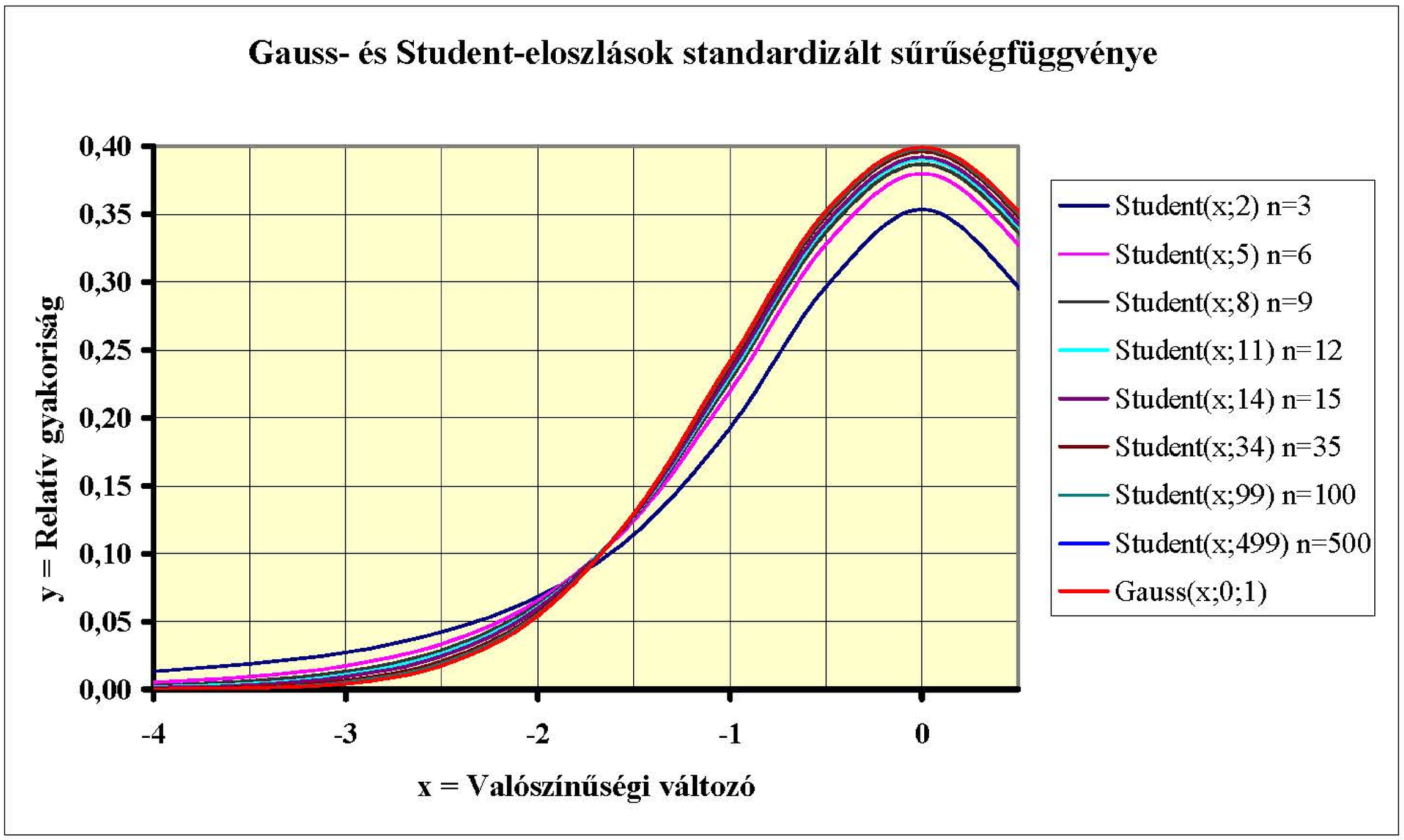
$n = 6 \rightarrow t_{(n-1=5)} = -2{,}01505 \quad p = 0{,}05$

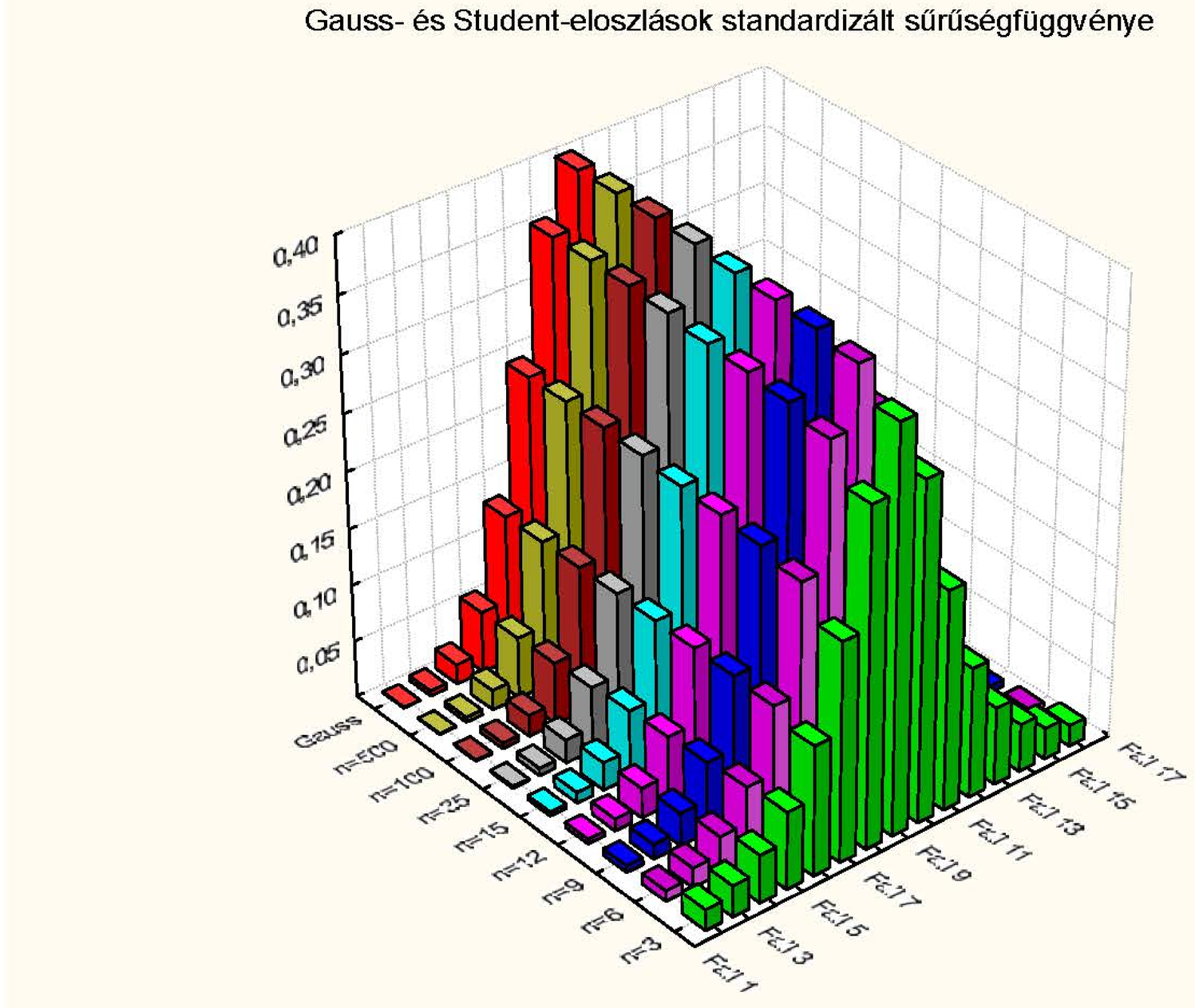


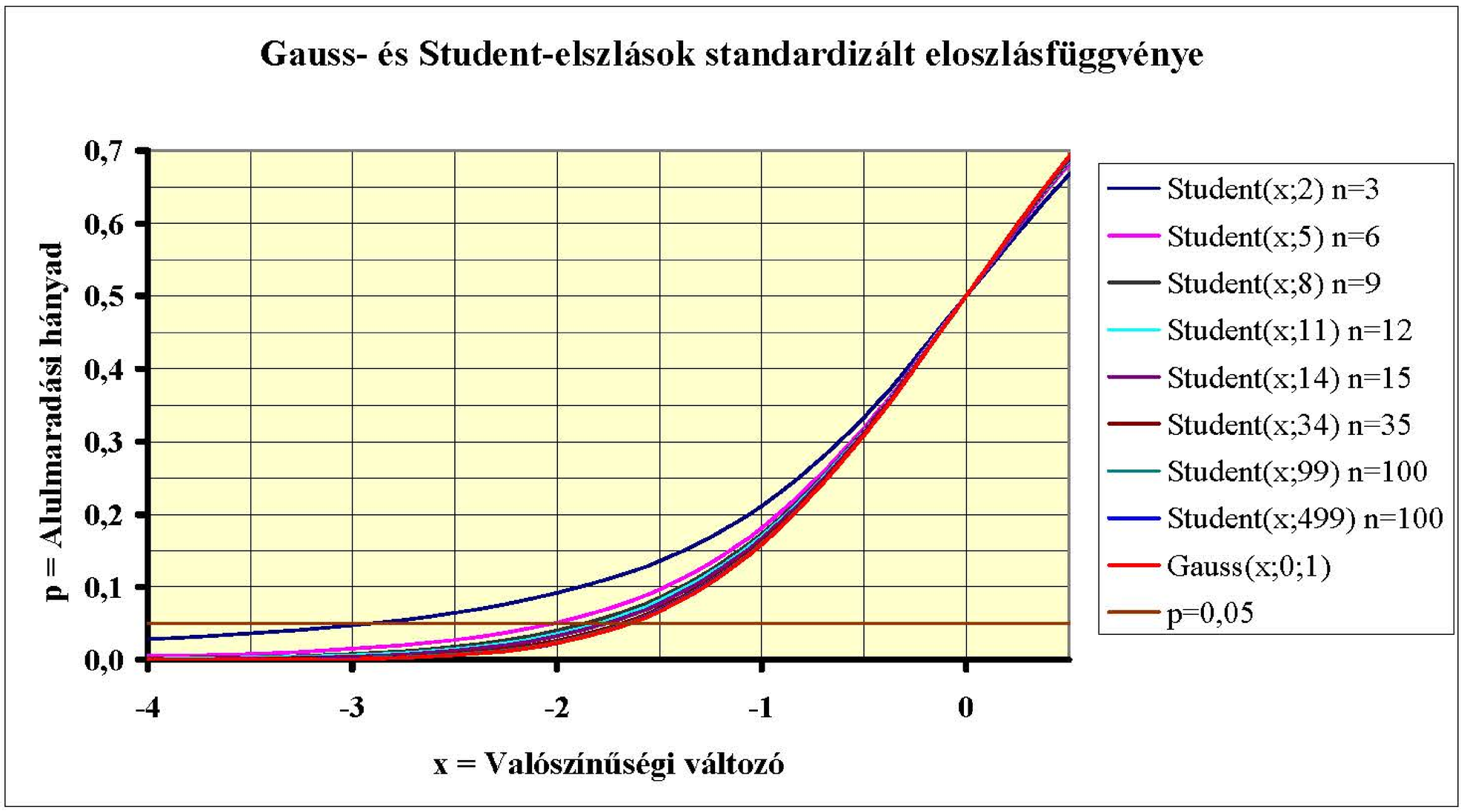
$n = 9 \rightarrow t_{(n-1=8)} = -1{,}85955 \quad p = 0{,}05$

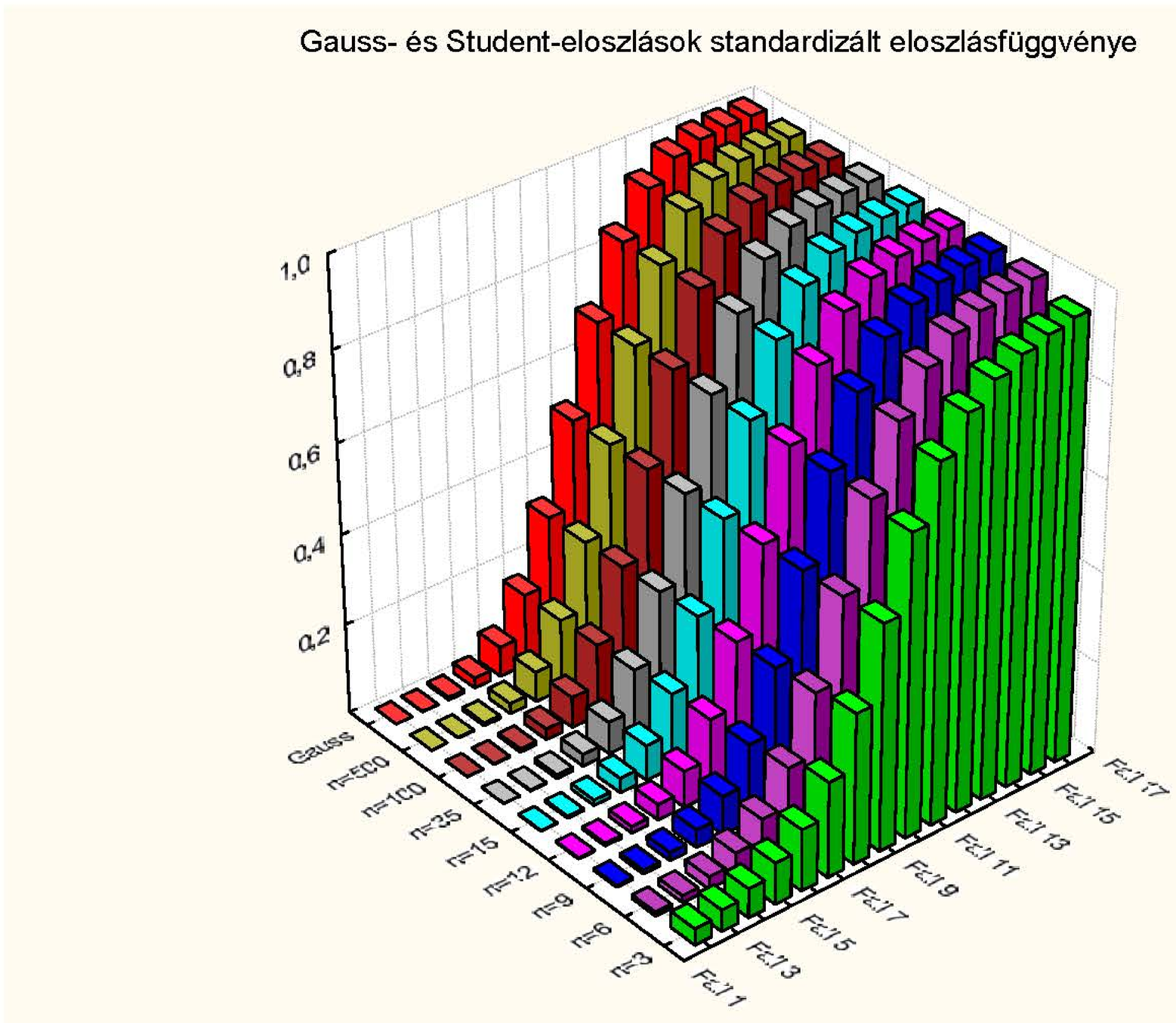


$n = 12 \rightarrow t_{(n-1=11)} = -1{,}79589 \quad p = 0{,}05$


Gauss- és Student-eloszlások standardizált sűrűségfüggvénye
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0,00
-4
-3
-2
-1
0
y = Relatív gyakoriság
x = Valószínűségi változó
Student(x;2) n=3
Student(x;5) n=6
Student(x;8) n=9
Student(x;11) n=12
Student(x;14) n=15
Student(x;34) n=35
Student(x;99) n=100
Student(x;499) n=500
Gauss(x;0;1)


Gauss- és Student-eloszlások standardizált sűrűségfüggvénye
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
Gauss
n=500
n=100
n=25
n=15
n=12
n=9
n=6
n=3
Fv:1 1
Fv:1 3
Fv:1 5
Fv:1 7
Fv:1 9
Fv:1 11
Fv:1 13
Fv:1 15
Fv:1 17


Gauss- és Student-elszlások standardizált eloszlásfüggvénye
p = Alulmaradási hányad
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
-4
-3
-2
-1
0
x = Valószínűségi változó
Student(x;2) n=3
Student(x;5) n=6
Student(x;8) n=9
Student(x;11) n=12
Student(x;14) n=15
Student(x;34) n=35
Student(x;99) n=100
Student(x;499) n=100
Gauss(x;0;1)
p=0,05


Gauss- és Student-eloszlások standardizált eloszlásfüggvénye
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
Gauss
n=500
n=100
n=35
n=15
n=12
n=9
n=6
n=3
Fc.l 1
Fc.l 3
Fc.l 5
Fc.l 7
Fc.l 9
Fc.l 11
Fc.l 13
Fc.l 15
Fc.l 17

Az egyoldali 5 %-os alulmaradási hányadhoz tartozó *Student*-tényező, 50 %-os elfogadási valószínűség mellett
(*Stange, K. – Henning, H.-J.*, 1966)

Mintaelem szám n	Szabadságfok n - 1	*Student*-tényező t_{n-1}
2	1	6,314
3	2	2,920
4	3	2,353
5	4	2,132
6	5	2,015
7	6	1,943
8	7	1,895
9	8	1,860
10	9	1,833
11	10	1,812
12	11	1,796
13	12	1,782
14	13	1,771
15	14	1,761
20	19	1,729
30	29	1,699
35	34	1,691
100	99	1,660
500	499	1,648
	∞	1,645

Megjegyzés: Esetünkben a *Student*-tényező az $N(0,1)$ eloszlású t-eloszlás — egyoldali 5 %-os alulmaradási hányadához tartozó — t_{n-1} valószínűségi változója (p = 0,05 értékhez tartozó kvantilise, küszöb értéke).

Kérem tekintse meg a
— *A beton nyomószilárdságának elfogadási tényezője az új betonszabványok szerint*
és
— *A beton nyomószilárdság megfelelőségének feltételei az új betonszabványok szerint*
című oldalunkat is.

Vissza a

Noteszlapok abc-ben ***Noteszlapok tárgykörönként***

tartalomjegyzékhez

A HIPERGEOMETRIKUS ELOSZLÁSTÓL AZ OC-GÖRBÉIG

Dr. Kausay Tibor

A cikk a Vasbetonépítés folyóirat 2023. évi 3. számának 58-62. oldalán jelent meg:
http://fib.bme.hu/folyoirat/vb/vb2023_3/vb2023_3_1.pdf
https://doi.org/10.32969/VB.2023.3.1

Az előadás itt található:
http://www.betonopus.hu/mellekletek/balazslgyorgy65.mp4

A 65. éves Balázs L. György egyetemi tanár úr tiszteletére 2023. április 28-án, a Műegyetemen „Korszerű betonelemek a fenntartható jövő érdekében" címmel szimpóziumot rendeztek. Az ünnepi „BLGY 65" szimpóziumon és e cikkben azt az utat tekintettük át, amely a hipergeometrikus valószínűségi eloszlástól az OC-görbéig vezet.

Kulcsszavak: Beton, Binomiális-eloszlás, Gauss-féle normális eloszlás, Hipergeometrikus-eloszlás, Matematikai statisztika, Megfelelőség, Nyomószilárdság, OC-görbe Student-féle *t*-eloszlás, Szemalak, Szemhalmaz

1. BEVEZETÉS

Az 1958-as esztendő igen nevezetes volt, két okból is. Egyrészt ekkor született *Balázs György László*, a ma ünnepelt egyetemi tanár (*1. ábra*); másrészt ekkor jelent meg *K. Stange* cikke a Metrika folyóiratban arról, hogy a kettős valószínűségi hálózatban az elfogadási jelleggörbe (működési jelleggörbe, röviden: OC-görbe, angolul: Operating characteristic curve; németül: Annahmekennlinie, Operationscharakteristik, OC-Kurve) egyenessé válik, és két pontra fektetett vonallal egyszerűen meghatározható (*Stange*, 1958). Ezt követően 1964-ben *Jusius Bonzel* és *Wilhelm Manns* írt a Betontechnische Berichte folyóiratban a betonnyomószilárdság az OC-görbe segítségével való értékeléséről (*Bonzel* et al., 1969). Hazánkban *Windisch Andor* tanár úr 1982-ben így fogalmazott „A beton minőségellenőrzése" című könyv 102. oldalán: „Az OC-görbét egyetlen pontjával (p, $A_{(p)}$) és a hozzá tartozó próbatestszámmal (n) is megadhatjuk" (*Windisch*, 1982).

E cikk szerzője az 1960-as évek végén munkahelyi feladatul annak vizsgálatát kapta, mi a valószínűsége annak, hogy az N szemcséből álló és M nem megfelelő szemalakú szemcsét tartalmazó zúzottkő halmazból vett n elemű mintában lévő nem megfelelő szemalakú szemcsék száma k. A szerző a kérdésre a választ a hipergeometrikus valószínűségi eloszlásból kiindulva keresvén megszerkesztette a binomiális valószínűségi eloszlás transzformált eloszlásgörbéjét, amelyről akkor föl sem merült benne, hogy az OC-görbére jutott (*Kausay*, 1968 és 1970)

1. ábra: Az előadás nyitóképe a „BLGY 65” szimpóziumon (*Kausay*, 2023)

2. HIPERGEOMETRIKUS VALÓSZÍNŰSÉGI ELOSZLÁS

Adott p hibaarányú (p = M/N alulmaradási hányadú, azaz M hibás elemet tartalmazó N elemszámú) tétel elfogadásának (átvételének) valószínűsége ($L = A_{(p)}$) az n elemszámú mintában talált nem megfelelő (hibás) elemek c számától, valamint a p és a c/n hányados kapcsolatát kifejező valószínűségi eloszlás fajtájától függ (*Rinne* et al., 1995), (*Windisch*, 1982):

- hipergeometrikus valószínűségi eloszlás esetén: $L(p|N;n;c) = Hi(c|N;M;n) = Hi(c|N;N\times p;n)$
- binomiális valószínűségi eloszlás esetén: $L(p|n;c) = Bi(p|n;c)$
- *Poisson*-eloszlás esetén: $L^*(p|n;c) = Po(c|n\times p)$

A p hibaarányú (tényleges alulmaradási hányadú) tétel elfogadásának (átvételének) valószínűsége ($A_{(p)}$) mind a mintában lévő $c = k_{megengedett}$ nem megfelelő (hibás) elemek számának növekedésével, mind a minta n elemszámának csökkenésével növekszik.

Annak valószínűsége, hogy az N elemű, M nem megfelelő elemet tartalmazó halmazból visszatevés nélküli reprezentatív mintavétellel nyert n elemű mintában a nem megfelelő elemek száma k, a P_k hipergeometrikus valószínűségi eloszlással számítható ki:

$$P_k = \frac{\binom{M}{k} \times \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

A valószínűséget pontosan leíró hipergeometrikus eloszlás esetén a visszatevés nélküli mintavétel következtében minden egyes mintaelem kivételekor

megváltozik a halmaz eredeti $p = M/N$ alulmaradási hányada. A hipergeometrikus eloszlás felhasználás nehézsége, hogy nagy N számok mellett a valószínűségek kiszámítása igen körülményes. Ezért azzal a közelítő feltételezéssel szokás élni, hogy a minta elemei csak az adott elem vizsgálatának idejére kerülnek ki a halmazból.

3. BINOMIÁLIS VALÓSZÍNŰSÉGI ELOSZLÁS

Az ilyen visszatevéses reprezentatív mintavétel esetén a nem megfelelő elemek részaránya a halmazban változatlan marad, azaz $p = M/N$ = konstans. Ebben az esetben a visszatevéses mintavétel feltételezése mellett a keresett valószínűséget a könnyebben meghatározható

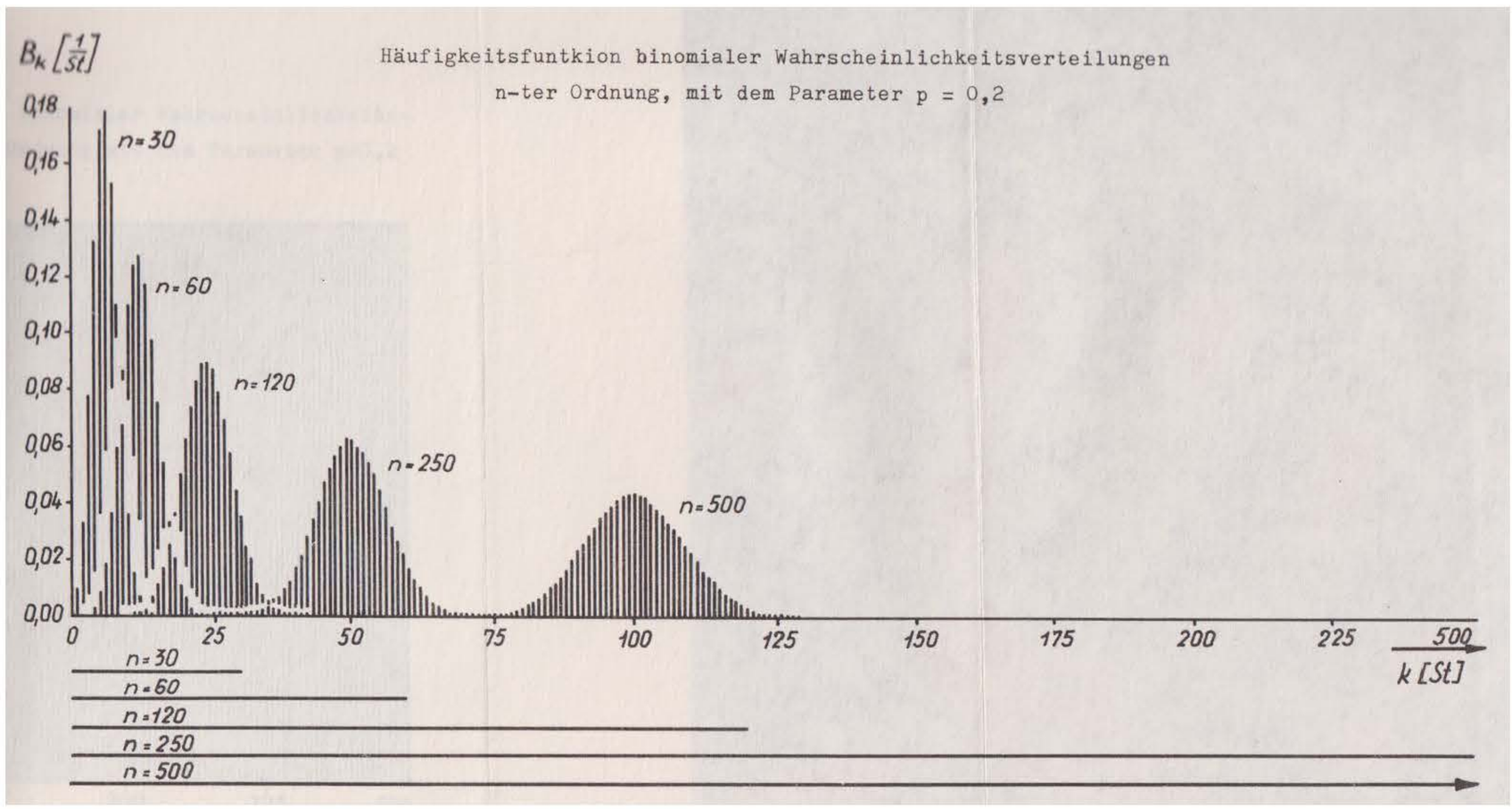
$$B_k = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

binomiális valószínűségi eloszlás fejezi ki, ahol $k = 0, 1, 2, \ldots n$ és $0 \leq p = \leq 1{,}0$.

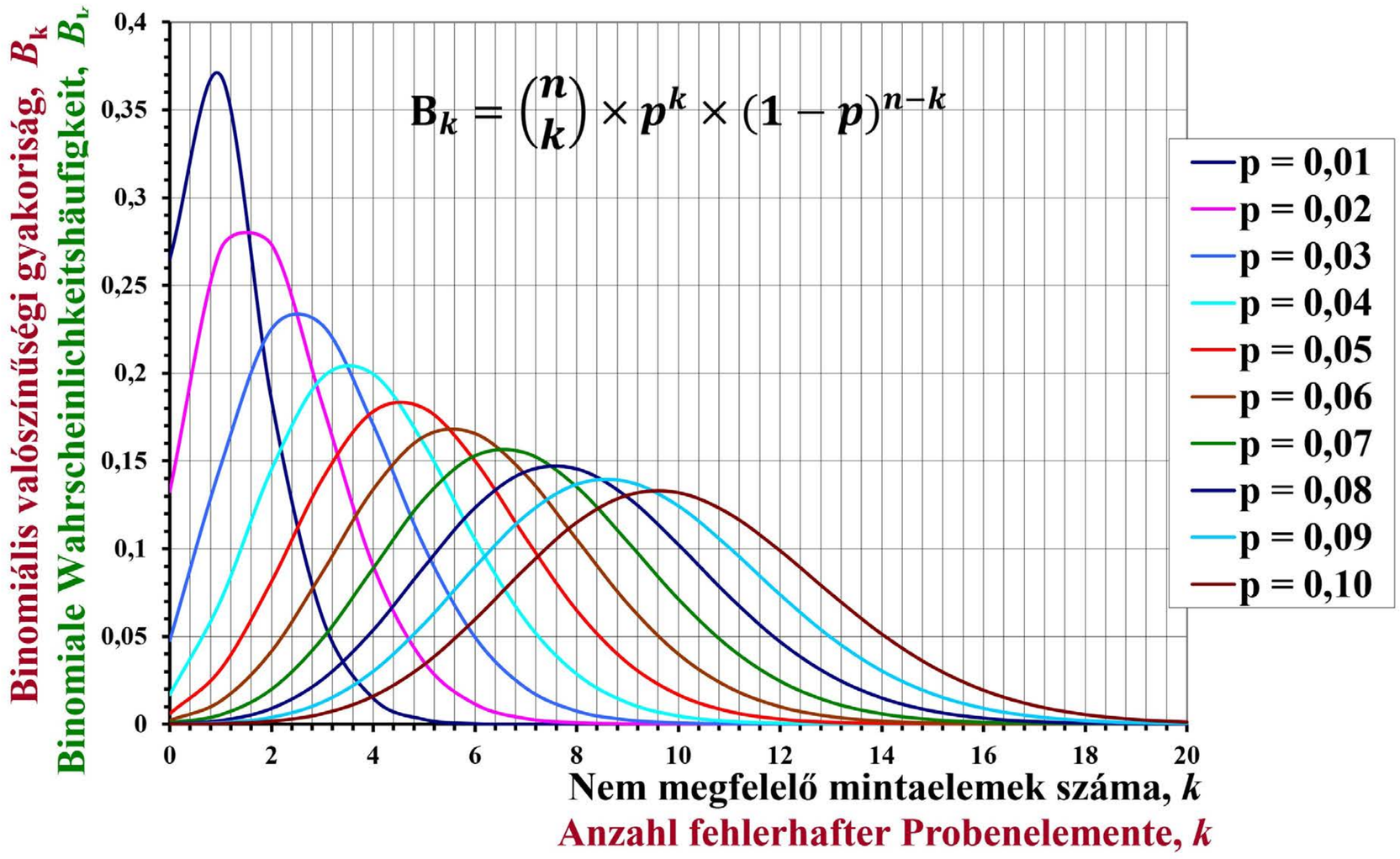
Példaként vizsgáljuk meg, mi a valószínűsége (B_k) annak, hogy különböző p alulmaradási hányadú tételekből $n = 100$ elemszámú mintát véve a nem megfelelő elemek száma a mintában k. A választ a 100-adrendű, p paraméterű binomiális valószínűségi eloszlás gyakoriságfüggvényei adják meg (*2/a.* és *2/b. ábra*). A binomiális eloszlás diszkrét eloszlás, de a szemléletesség kedvéért a 2020. évben számítógéppel rajzolt ábrákon az egyes valószínűségeket ábrázoló pontokat folyamatos vonallal összekötöttük. A *2/b. ábrán* látni, hogy a binomiális eloszlás nem szimmetrikus, hanem egyre inkább jobbra elnyúló (jobbra egyre ferdébb), ha p értéke tart a nullához. A binomiális eloszlás a $p = 0{,}5$ értéknél szimmetrikus, és attól $p = 0{,}0$, illetve $p = 1{,}0$ felé távolodva egyre ferdébb (jobbra, illetve balra). Ennek következménye, hogy esetünkben – lévén jobbra ferdülő eloszlás – a módusznál nagyobb a medián, és a mediánnál nagyobb a k független valószínűségi változó számtani középértéke (várható értéke).

A módusz a legnagyobb B_k valószínűséghez tartozó valószínűségi változó ($k_{\text{módusz}}$), itt a gyakoriságfüggvénynek maximuma, az eloszlásfüggvénynek inflexiós pontja van.

A medián az a valószínűségi változó ($k_{\text{medián}}$), amelynél az eloszlásfüggvény $\Sigma B_k = 0{,}5$ értéket vesz fel, feltéve, hogy ilyen létezik (*Vincze E.*, 1972; *Vincze I.*, 1958).



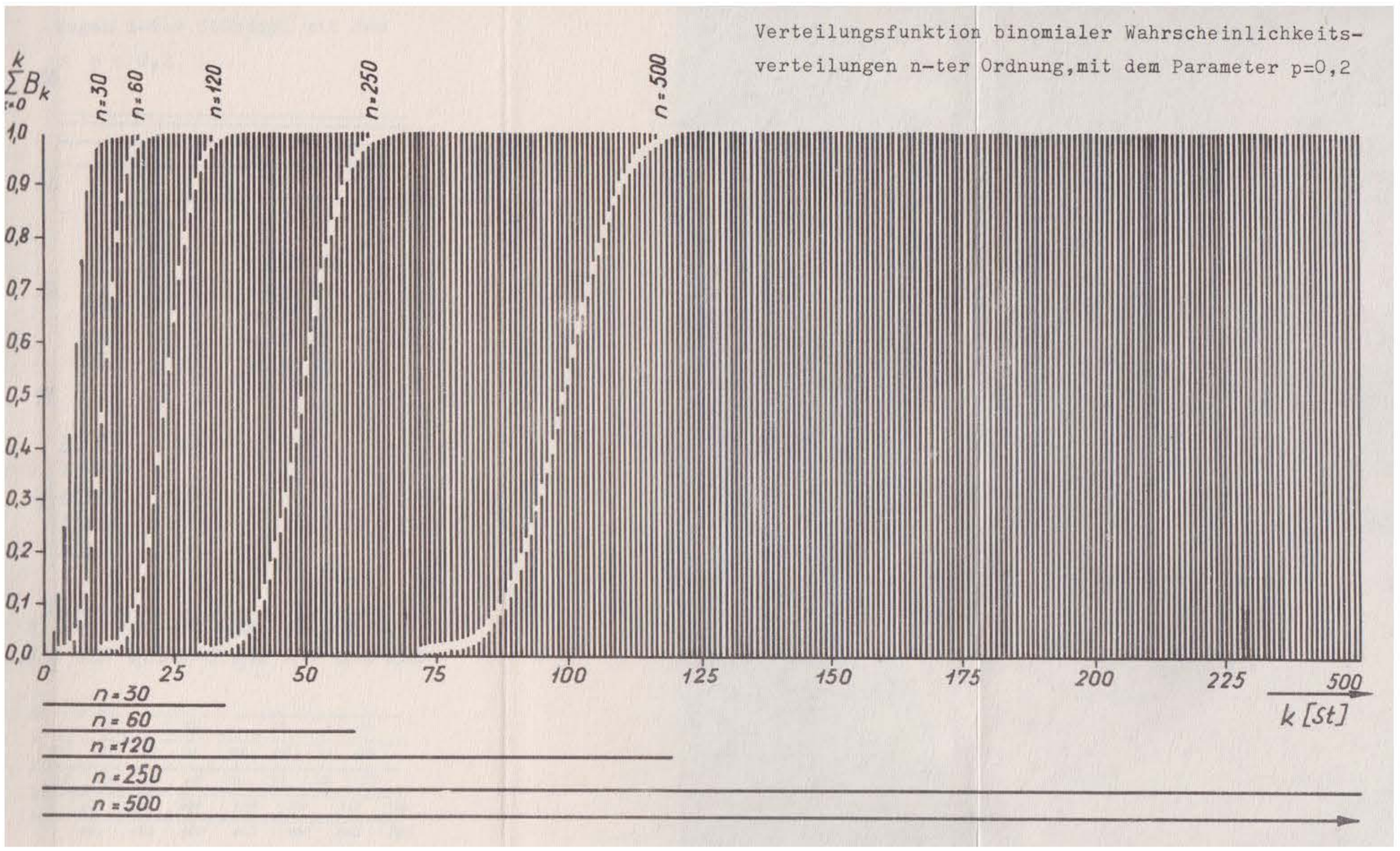
2/a. ábra: Binomiális valószínűségi eloszlás n-ed rendű gyakoriságfüggvényei, ha a halmaz eredeti alulmaradási hányada $p = M/N = 0{,}2$ (*Kausay*, 1968)



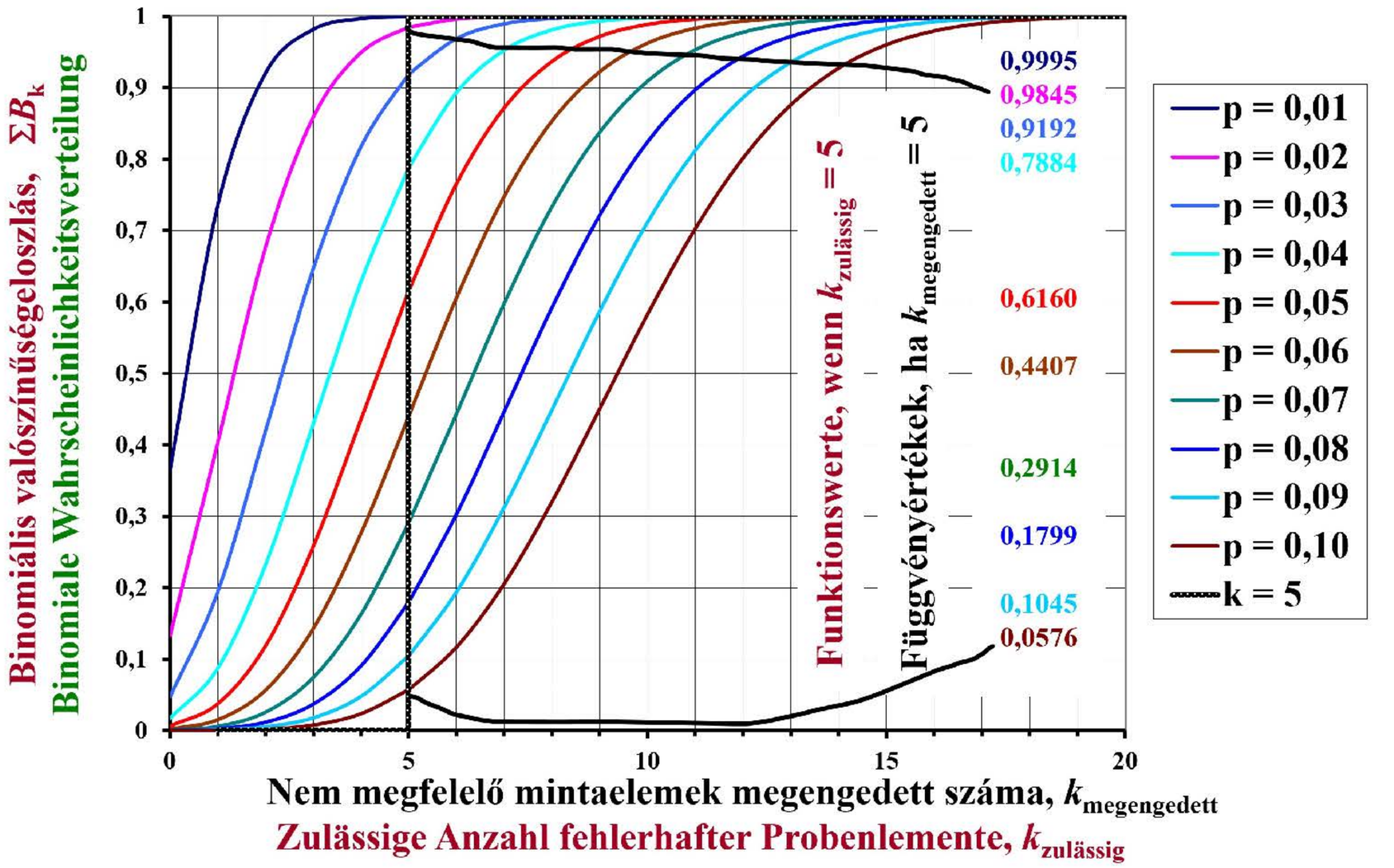
2/b. ábra: Binomiális valószínűségi eloszlás gyakoriságfüggvényei, ha a mintaelemszám $n = 100$ (*Kausay*, 2023)

A binomiális valószínűségi eloszlás gyakoriságfüggvényeiből meghatározhatók az eloszlásfüggvények, amelyek azt fejezik ki, mi a valószínűsége (ΣB_k) annak, hogy különböző p alulmaradási hányadú tételekből példánk szerint $n = 100$ elemszámú mintát véve, a nem megfelelő elemek megengedett száma a mintában $k_{\text{megengedett}}$ (*3/a.* és *3/b. ábra*).

A 3/b. *ábra* valószínűségi eloszlásfüggvényeiből leolvasható, hogy a tételből $n = 100$ elemszámú mintát véve, annak a valószínűsége, hogy a nem megfelelő mintaelemek megengedett száma – mint a tétel elfogadásának feltétele – $k_{\text{megengedett}} = 5$, például $p = 0{,}01$ alulmaradási hányadú tétel esetén 0,9995, $p = 0{,}02$ alulmaradási hányadú tétel esetén 0,9845, $p = 0{,}03$ alulmaradási hányadú tétel esetén 0,9192 stb.



3/a. ábra: Binomiális valószínűségi eloszlás *n*-ed rendű eloszlásfüggvényei, ha a halmaz eredeti alulmaradási hányada $p = M/N = 0{,}2$ (*Kausay*, 1968)



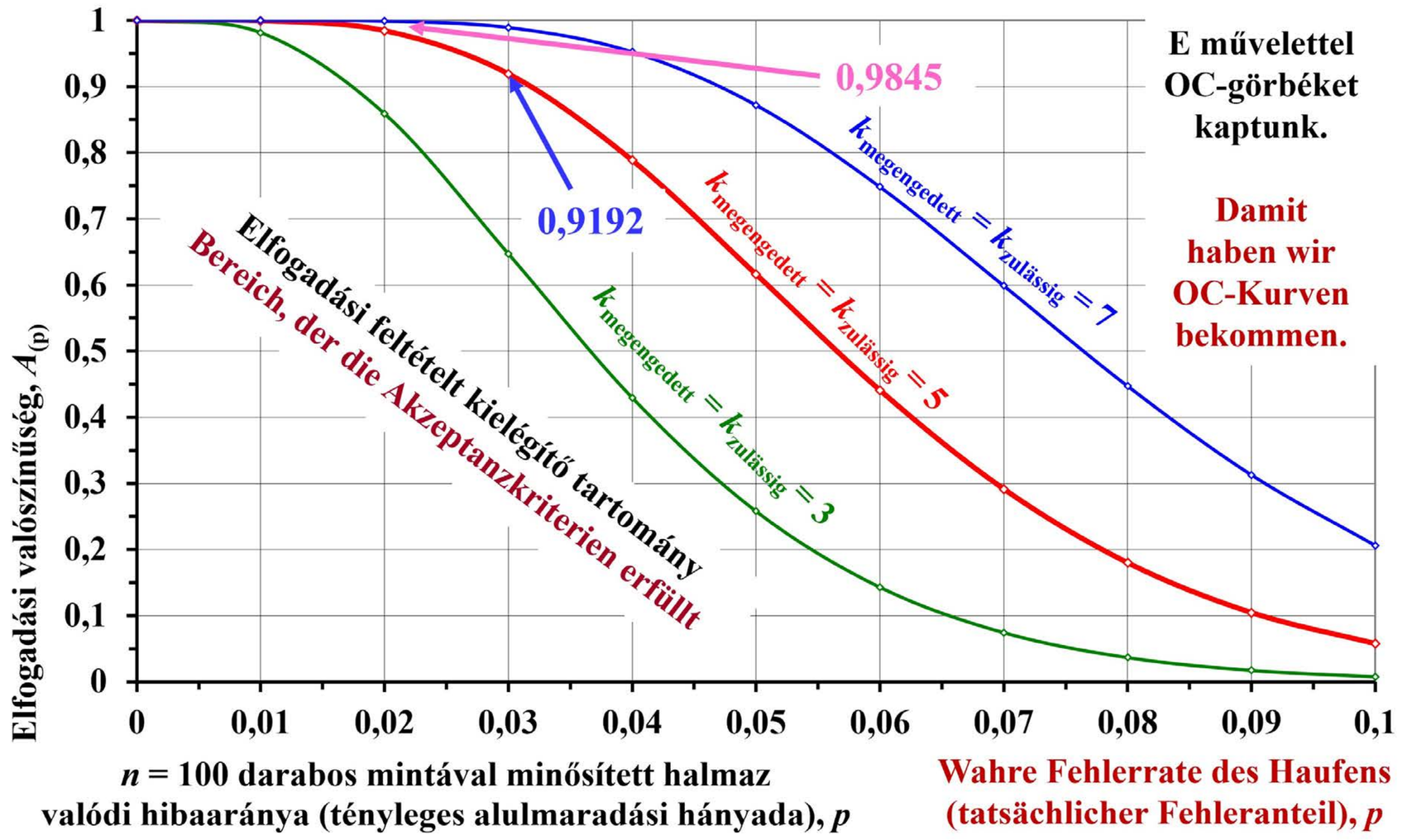
3/b. ábra: Binomiális valószínűségi eloszlás eloszlásfüggvényei, ha a mintaelemszám $n = 100$ (*Kausay, 2023*)

4. A BINOMIÁLIS ELOSZLÁS TAPASZTALATI ALULMARADÁSI HÁNYAD SZERINT STANDARDIZÁLT OC-GÖRBÉJE

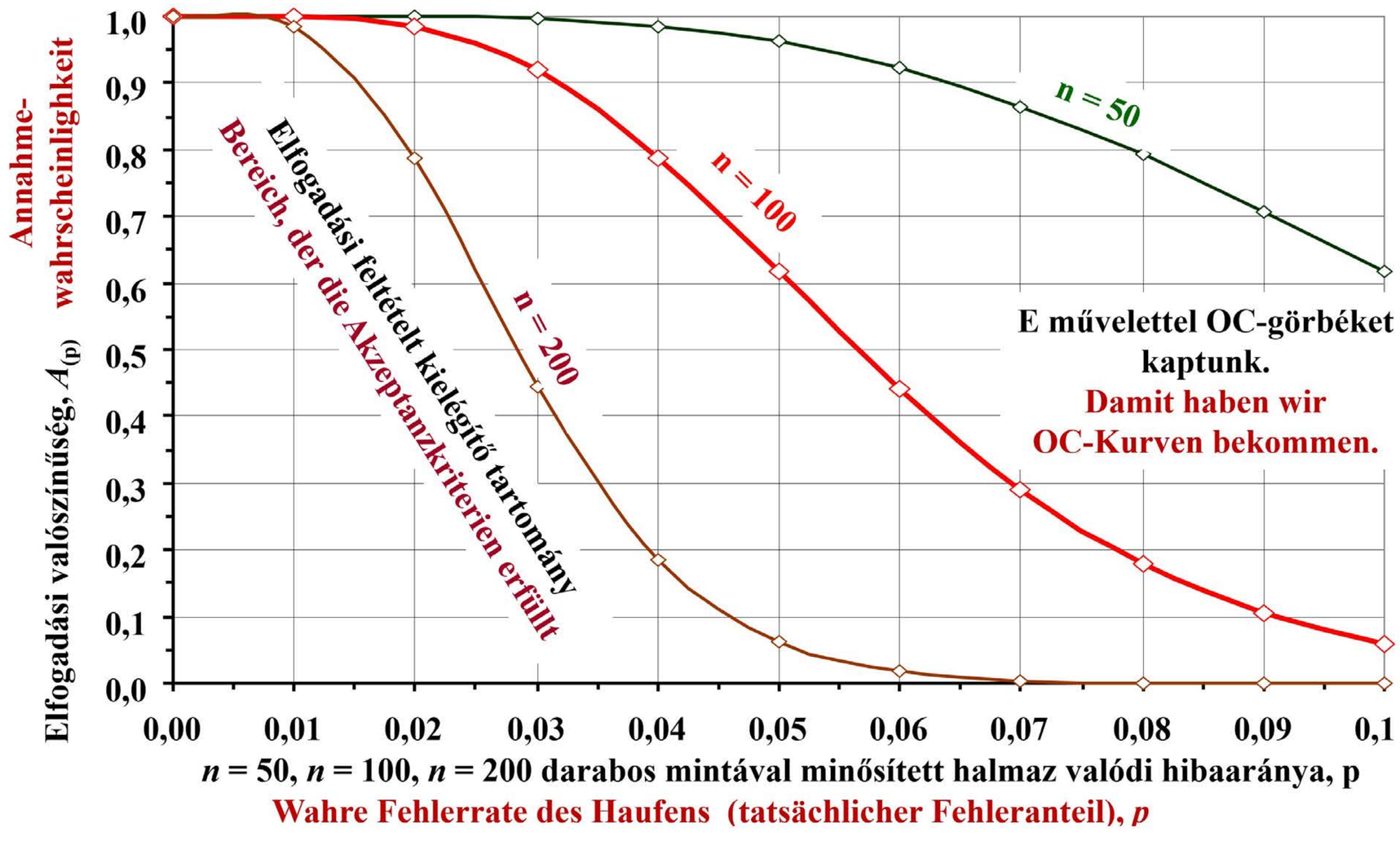
A *3/b. ábra* $k_{\text{megengedett}} = 5$ abszcisszájához tartozó (p, ΣB_k) értékpárokat új koordinátarendszerben ábrázolva és folyamatos vonallal összekötve, a p (tényleges alulmaradási hányad) független változójú $\Sigma B_k = A(p)$ elfogadási valószínűségi görbét kapjuk meg (*4. ábra* középső görbe). E műveletet a $k_{\text{megengedett}} = 3$ és a $k_{\text{megengedett}} = 7$ abszcisszájához tartozó (p, ΣB_k) értékpárokkal is elvégezve kapjuk a *4. ábrán* látható másik két, p független változójú elfogadási valószínűségi görbét.

A binomiális valószínűségi eloszlás különböző n-ed rendű eloszlásfüggvényeiből kiindulva hasonlóképpen szerkeszthetők meg az *5. ábra* különböző n-ed rendű p független változójú $\Sigma B_k = A(p)$ elfogadási valószínűségi görbéi, ha a nem megfelelő elemek megengedett száma a mintában $k_{\text{megengedett}} = 5$.

A *4. és 5. ábrán* megszerkesztett görbék a binomiális eloszlás OC-görbéi. A görbe alatti tartomány az elfogadási feltételt kielégítő esetek, a görbe feletti tartomány az elfogadási feltételt ki nem elégítő megjelenési helye.



4. ábra: Elfogadási valószínűségi görbe – OC-görbe – binomiális eloszlás feltételezésével, ha a mintaelemszám $n = 100$ és a nem megfelelő mintaelemek megengedett száma $k_{\text{megengedett}} = 3$, $k_{\text{megengedett}} = 5$ és $k_{\text{megengedett}} = 7$, azaz rendre $k_{\text{megengedett}}/n = 0{,}03$; $k_{\text{megengedett}}/n = 0{,}05$ és $k_{\text{megengedett}}/n = 0{,}07$ (*Kausay, 2023*)

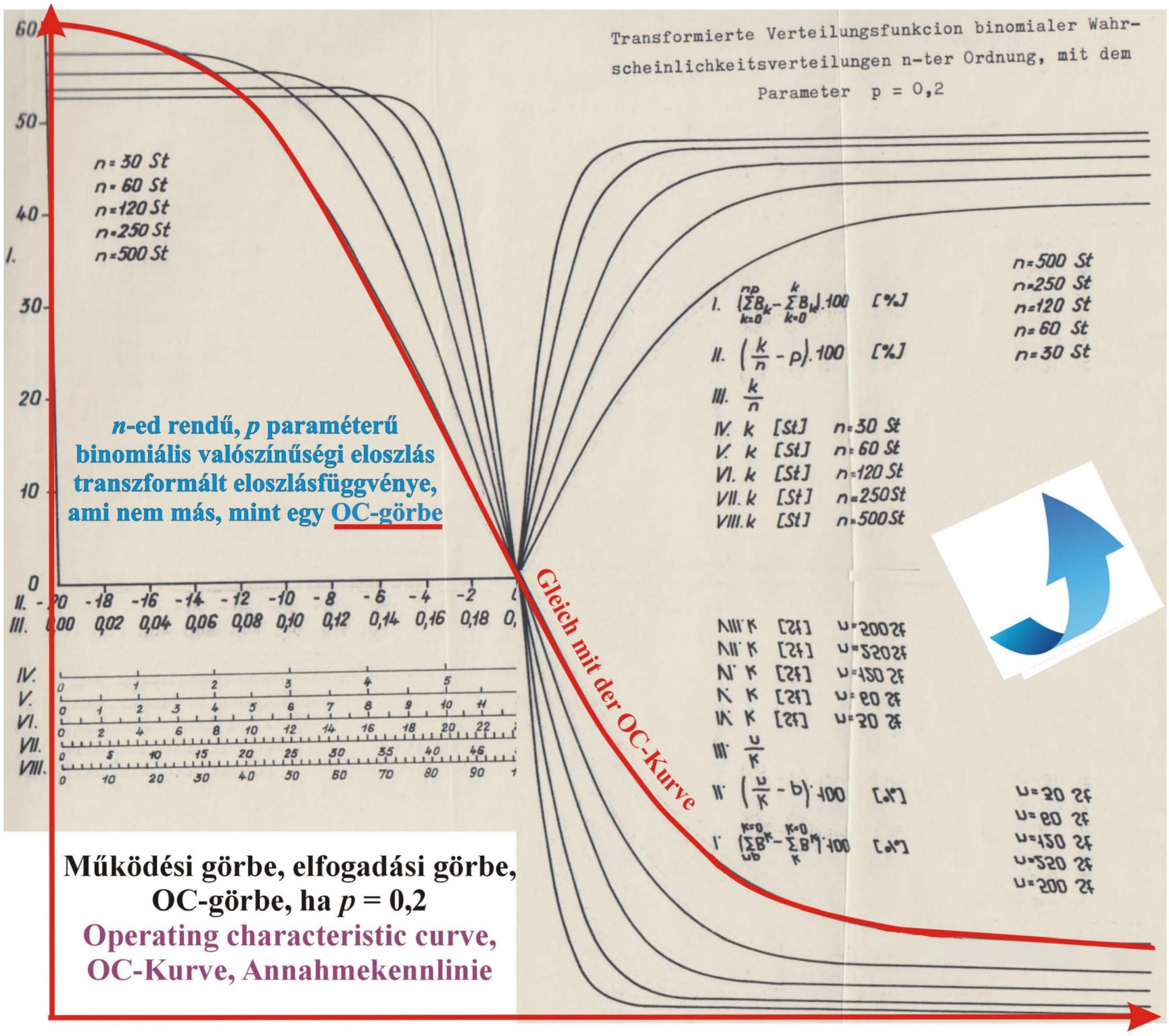


5. ábra: Elfogadási valószínűségi görbe – OC-görbe – binomiális eloszlás feltételezésével, ha a mintaelemszám n = 50, n = 100 és n = 200, és a nem megfelelő mintaelemek megengedett száma $k_{\text{megengedett}}$ = 5, azaz rendre $k_{\text{megengedett}}/n$ = 0,100; $k_{\text{megengedett}}/n$ = 0,050 és $k_{\text{megengedett}}/n$ = 0,025 (*Kausay, 2023*)

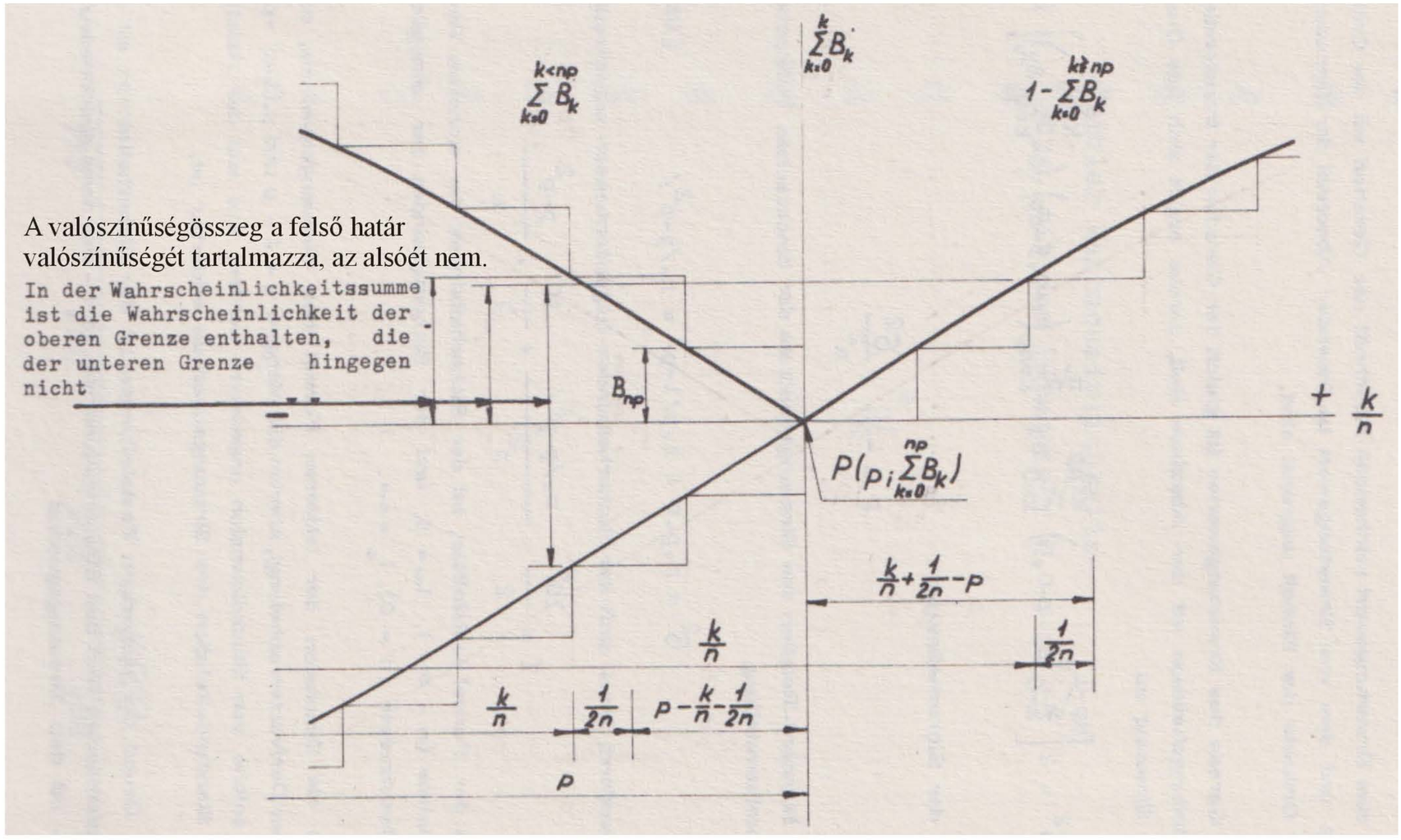
Tekintve, hogy a *4.* és *5. ábra* az optimális mintaelemszám kiválasztására nem eléggé szemléletes, célszerű a tapasztalati alulmaradási hányad (k/n) szerint standardizált (k/n – p) elfogadási valószínűségi görbéket $(k/n - p)\times 100$ abszcissza beosztású (az alulmaradási hányad szerinti standardizálás) és

$$\left| \sum_{k=0}^{n/p} B_k - \sum_{k=0}^{k} B_k \right| \times 100$$

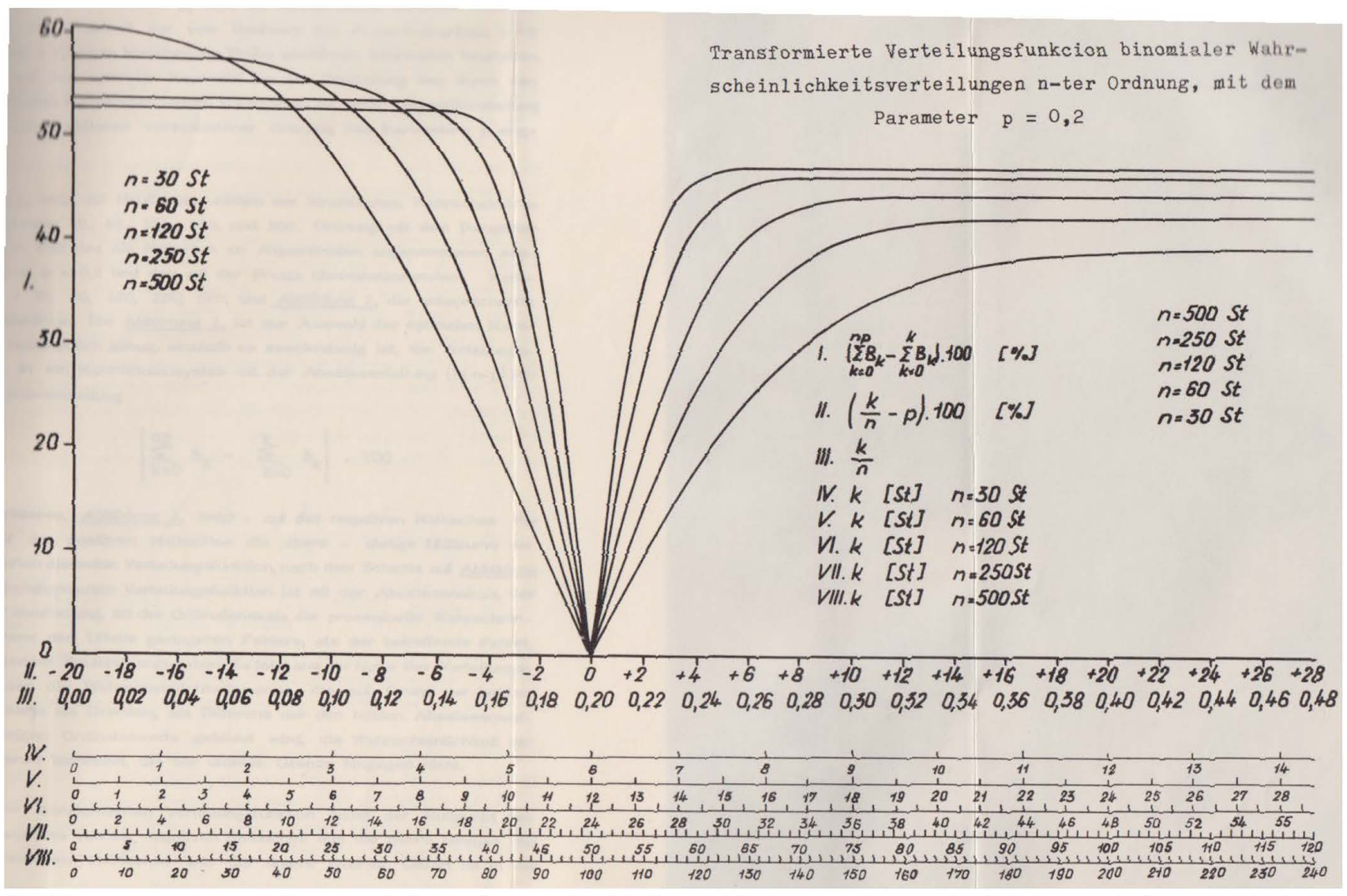
ordináta beosztású koordinátarendszerbe transzformálni (*6. ábra*). A *6.-9. ábrákon* a transzformált diszkrét eloszlásfüggvény – a negatív féltengelyen alsó, a pozitív féltengelyen felső – folytonos burkológörbéjét tüntettük fel a *7. ábra* vázlata szerint.



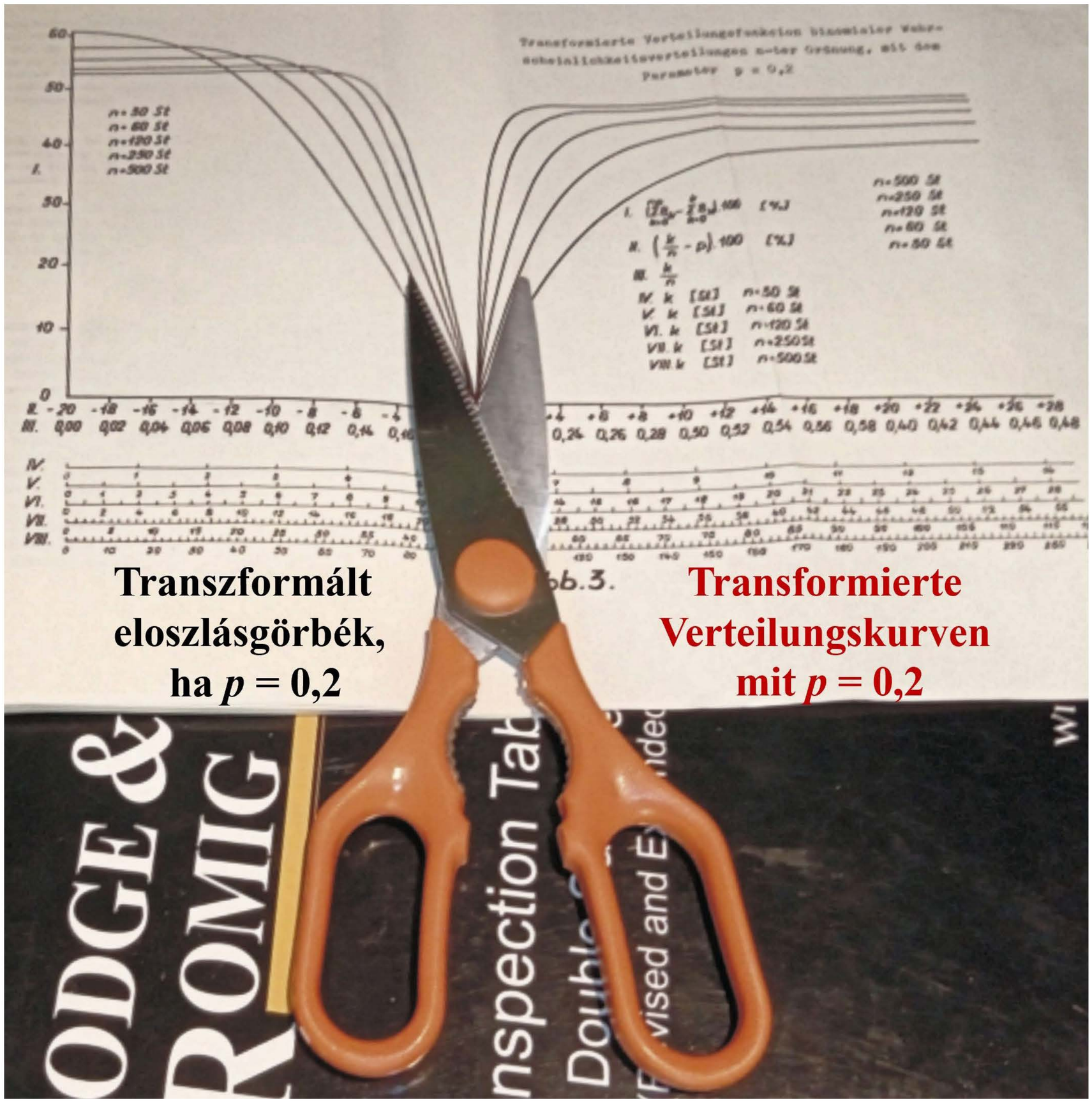
6. ábra: A tapasztalati alulmaradási hányad (k/n) szerint standardizált binomiális elfogadási valószínűségi görbék – a tapasztalati alulmaradási hányad szerint standardizált OC-görbék – transzformálása (*Kausay, 2023*)



7. ábra: A binomiális valószínűségi eloszlás tapasztalati alulmaradási hányad (k/n) szerint standardizált eloszlásfüggvénye transzformálásának vázlata (*Kausay*, 1968)



8. ábra: n-ed rendű, $p = 0{,}2$ alulmaradási hányadú, a tapasztalati alulmaradási hányad (k/n) szerint standardizált binomiális valószínűségi eloszlások transzformált eloszlásfüggvényei (*Kausay*, 1968)



9. ábra: A mintavétel ítéletének megbízhatósága az binomiális valószínűségi eloszlás tapasztalati alulmaradási hányad (k/n) szerint standardizált és transzformált eloszlásfüggvénye – a tapasztalati alulmaradási hányad szerint standardizált OC-görbe – alapján (*Kausay, 2023*)

A *9. ábrán* látható, hogy a mintavétel ítéletének adott p hibaarányhoz (tényleges alulmaradási hányadhoz) tartozó megbízhatósága annál nagyobb, mennél szűkebb a binomiális transzformált eloszlásfüggvény – a tapasztalati alulmaradási hányad szerint standardizált OC-görbe – két szárának, azaz az ollónak a nyílása.

Valamely mintavétel ítéleteinek adott hiba-részhányadhoz tartozó megbízhatósága mérőszámául jól használható az ún. biztonsági index (I), amelyen a transzformált eloszlásfüggvény két szára, azok abszcisszával párhuzamos érintői és a zérus abszcisszájú egyenes által határolt területek ez utóbbira vett elsőrendű nyomatéka abszolútértékének összegét értjük. Az elsőrendű nyomaték ugyanis kellőképpen kihangsúlyozza az abszolútértékre nagyobb ítélethibánál fellépő valószínűségösszeg kedvezőtlenebb szerepét. A tagonkénti nyomatékszámítást elkerülhetjük a biztonsági index (I) és a valószínűségeloszlás szórásnégyzete közötti összefüggés felhasználásával.

Minthogy a binomiális valószínűségeloszlás szórásnégyzetének a p tényleges alulmaradási hányaddal és az n mintaelemszámmal kifejezett összefüggése:

$$\sigma^2 = n \times (p - p^2)$$

a biztonsági index képlete (*Kausay*, 1968):

$$I = \frac{10^6}{2} \times \frac{p - p^2}{n}$$

A biztonsági index nevezetlen szám. A biztonsági index képletéből kiolvasható, hogy a biztos mintavétel ($n = \infty$) biztonsági indexe $I_{n=\infty} = 0$, a lehetetlen mintavételé ($n = 0$) pedig $I_{n=0} = \infty$. Például a *8. ábrán* ábrázolt $p = 0{,}2$ alulmaradási hányadú binomiális OC-görbék biztonsági indexe (*Kausay*, 1968):

$n = 30$ db	$I = 2667$
$n = 60$ db	$I = 1333$
$n = 120$ db	$I = 667$
$n = 250$ db	$I = 320$
$n = 500$ db	$I = 160$

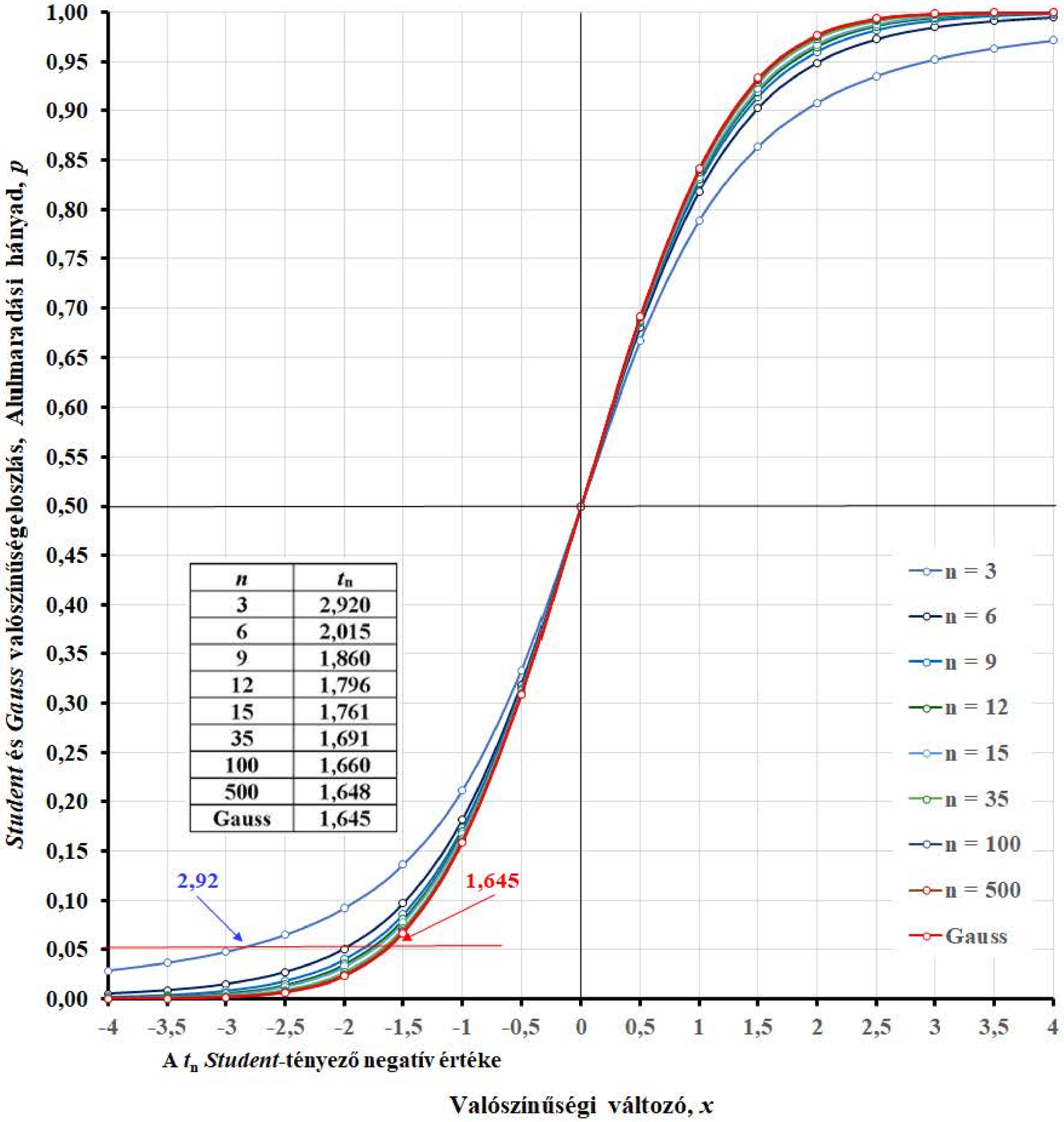
5. A *t*-ELOSZLÁS TÉNYLEGES ALULMARADÁSI HÁNYAD SZERINTI OC-GÖRBÉJE

A megszilárdult beton nyomószilárdságának 5%-os alulmaradáshoz tartozó jellemző értékét az MSZ EN 1990:2011 Eurocode szabvány D7.2 szakasza szerint a *t* valószínűségi eloszlásnak az *n* mintaelemszámtól függő valószínűségi változója, a *Student*-tényező alkalmazásával határozzuk meg. A mintaelemszám növekedésével a *t*-eloszlás egyre jobban megközelíti a *Gauss*-féle normális eloszlást (*10. ábra*). A visszavont MSZ 4720-2:1980 szabvány szilárdsági előírása is azon a feltételezésen alapult, hogy a szabványos betonok nyomószilárdságának eloszlása a *Gauss*-féle normális eloszlásnak, illetve az azt közelítő *Student*-féle eloszlásnak felel meg.

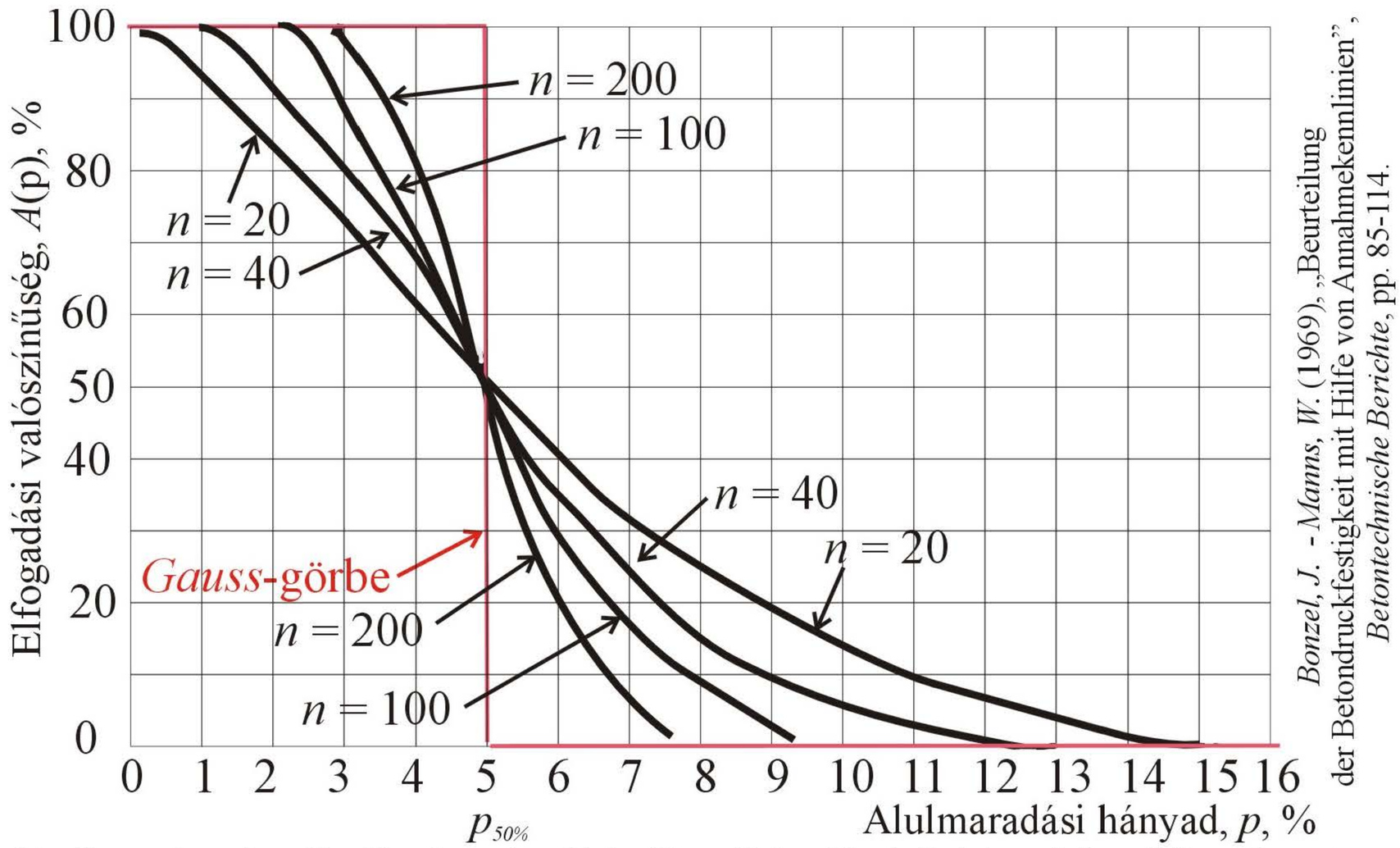
A *t*-eloszlás (*Student*-eloszlás) tényleges alulmaradási hányad ($p = M/N$) szerinti OC-görbéjéből (*11. ábra*) azt olvashatjuk le, hogy mekkora valószínűséggel vesszük át (fogadjuk el) a *p* alulmaradási hányadú tételt, ha a minta elemszáma *n*. Ha a hibás elemek részaránya a megengedett $p_{50\%} = 5\%$-nál kisebb, akkor az átvétel valószínűsége 50%-nál nagyobb; ha a hibás elemek részaránya a megengedett $p_{50\%} = 5\%$-nál nagyobb, akkor az átvétel valószínűsége 50%-nál kisebb, ha pedig éppen $p_{50\%} = 5\%$, akkor az átvevő és a gyártó kockázata ugyanakkora (50%).

E görbék sajátsága, hogy az elfogadási valószínűség ($A(p)$) értéke a megengedett $p_{50\%}$ tényleges alulmaradási hányad esetén az *n* mintaelemszámtól függetlenül $A(p) = 0{,}5$, más szóval a *t*-eloszlás $p_{50\%}$ tényleges megengedett alulmaradási hányadhoz tartozó OC-görbéi a ($p_{50\%}$, $A_{(p)} = 0{,}5$) pontban metszik egymást.

Ha az adott $p_{50\%}$ abszcissza függőlegesén az OC-görbék metszéspontja feljebb tolódik, azaz $A(p) > 0{,}5$, akkor az OC-görbe nem a *t*-eloszlás származéka, és minthogy a hozzá tartozó átvételi valószínűség 50%-nál nagyobb, a nyomószilárdság értékelési feltétel „gyártóbarát" ahogy azt *Hosser* és *Gensel* az EN 206 (napjainkban: MSZ EN 206:2013+A2:2021) szabvány betonszilárdság-megfelelőségi igazolásáról szólva nevezte (*Hosser* et al., 1995).



10. ábra: A *t*-eloszlás (*Student*-eloszlás) eloszlásfüggvényei különböző *n* mintaelemszámok esetén. A *Gauss*-féle eloszlás az $n = \infty$ mintaelemszámhoz tartozik.



Bonzel, J. - Manns, W. (1969), „Beurteilung der Betondruckfestigkeit mit Hilfe von Annahmekennlinien”, *Betontechnische Berichte*, pp. 85-114.

11. ábra: A *t*-eloszlás (*Student*-eloszlás) elfogadási valószínűségi görbéi – OC-görbe – ha a mintaelemszám $n = 20$, $n = 40$, $n = 100$ és $n = 200$, és a nem megfelelő elemek megengedett részaránya a tételben $p_{50\%} = 5$. A *Gauss*-féle eloszlás az $n = \infty$ mintaelemszámhoz tartozik.

6. ÖSSZEFOGLALÁS

Az OC-görbe (nevezik működési vagy elfogadási jelleggörbének is) valamely p alulmaradási hányadú tétel A(p) elfogadási valószínűségét adja meg, ha a minta elemeinek n száma.

Az OC-görbével választ kaphatunk a kérdésre, hogy milyen mértékben tükrözi vissza az n-elemű minta minősítéses vizsgálati eredménye a halmaz p hibaarányát; vagy hogy a megfelelőség követelményétől függően mekkora a p hibaarányú halmaz elfogadásának, illetve elutasításának valószínűsége.

Törekvésünk, hogy az átvevő kockázata ne legyen több, mint 50%, ha az értékelési időszak alatt az összes lehetséges eredmény alapsokaságának pontosan 5%-a van a vizsgált tulajdonság követelmény értéke alatt (a meg nem felelő minőségű terméket a vevő átveszi), illetve a gyártó kockázata ne legyen több, mint 50%, ha az értékelési időszak alatt az összes lehetséges eredmény alapsokaságának pontosan 5%-a van a vizsgált tulajdonság követelmény értéke felett (a megfelelő minőségű termék átvételét a vevő elutasítja).

Előírás, hogy a 100 év tervezési élettartamú szerkezetek betonjának elfogadási valószínűsége ne legyen több, mint ~50%, amely követelményt minden Eurocode 2 (MSZ EN 1992) szerint tervezett 50 év tervezési élettartamú szerkezet betonja esetén is ajánlott betartani (MSZ 4798:2016/4M:2023).

A binomiális valószínűségi eloszlás és a S*tudent*-féle *t*-eloszlás OC-görbéje e célkitűzés elérésének eszköze.

Miután áttekintettük az utat, amely a hipergeometrikus valószínűségi eloszlástól az OC-görbéig vezet, személyes gondolatokkal köszöntöttük a 65. születésnapját ünneplő *Balázs L. György* egyetemi tanár urat (*12. ábra*).

12. ábra: Az előadás záróképe a „BLGY 65” szimpóziumon (*Kausay*, 2023)

7. HIVATKOZOTT SZABVÁNYOK

MSZ 4720-2:1980 „A beton minőségének ellenőrzése. Általános tulajdonságok ellenőrzése". Visszavont szabvány

MSZ 4798:2016/4M:2023 „Beton. Műszaki követelmények, tulajdonságok, készítés és megfelelőség, valamint az EN 206 alkalmazási feltételei Magyarországon"

MSZ EN 206:2013+A2:2021 „Beton. Műszaki követelmények, teljesítőképesség, készítés és megfelelőség"

MSZ EN 1990:2011 „Eurocode: A tartószerkezetek tervezésének alapjai"

MSZ EN 1992 „Eurocode 2: Betonszerkezetek tervezése" szabványsorozat

8. HIVATKOZOTT IRODALOM

Bonzel, J. – Manns, W. (1969), „Beurteilung der Betondruckfestigkeit mit Hilfe von Annahmekennlinien", *Betontechnische Berichte*, pp. 85-114. Beton-Verlag. Düsseldorf, 1970.

Hosser, D. – Gensel, B. (1995), „Kritische Bewertung der Statistik beim Konformitätsnachweis der Betonfestigkeit nach prEN 206", Schlußbericht, *Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz (IBMB) TU Braunschweig*. Braunschweig, 1995.

Kausay T. (1968), „Die Kornzahl einer Probe bei der Bewertungs-Kornformprüfung", No. 11. Mitteilung des Zentrales Forschungs- und Projektierungsinstitut der Silikatindustrie (SZIKKTI), *Építésügyi Tájékoztatási Központ* (*ÉTK*). Budapest, 1968.

Kausay T. (1970), „A szemcsealak minősítéses vizsgálatának mintaelemszáma", *Mélyépítéstudományi Szemle*, XX. évf. 8. szám pp. 373-388.

Kausay T. (2020): „OC-görbe, működési jelleggörbe, elfogadási jelleggörbe", Fejezet az elektronikus „Betonos[e]könyv"-ben, *http://www.betonos-e-konyv.hu/book.php?pdf=betekon-101-6-2.pdf&fb3d-page=1*

Kausay T. (2023), „Prof. Dr. Balázs L. György köszöntése 65. születésnapja alkalmából", *http://www.betonopus.hu/mellekletek/balazslgyorgy65.mp4*

Rinne, H. – Mittag, H.-J. (1995), „Statistische Methoden der Qualitätssicherung", 3., überarbeitete Auflage, *Carl Hanser Verlag*. München, Wien, 1995.

Stange, K. (1958) „Die zeichnerische Behandlung von Plänen für messende Prüfung", *Metrika*, Vol. 1. No. 1. pp. 111-129.

Vincze E. (1972), „Valószínűségszámítás" a „Műszaki matematika" sorozat V. kötete, *Tankönyvkiadó*. Budapest, 1972.

Vincze I. (1958), „Statisztikai minőségellenőrzés. Az ipari minőségellenőrzés matematikai statisztikai módszerei" (szerk.: Vincze I.), *Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó*. Budapest, 1958.

Windisch A. (1982), „Valószínűségelméleti és matematikai statisztikai alapismeretek", in: „A beton minőségellenőrzése" (szerk.: Szalai K.), pp. 44-112., a *Szabványosítási Szakkönyvtár 26.* kiadványa, Szabványkiadó. Budapest, 1982.

Dr. Kausay Tibor (1934) okl. építőmérnök (1961), vasbetonépítési szakmérnök (1967), egyetemi doktor (1969), a műszaki tudomány kandidátusa (1978), Ph.D. (1997), címzetes egyetemi docens (1985), címzetes egyetemi tanár a BME Építőanyagok és Magasépítés Tanszéken (2003), a ***fib*** Magyar Tagozat tagja (2000), az MTA gróf Lónyay Menyhért emlékérmese (2003), a Palotás László-díj birtokosa (2015). Tevékenysége a betontechnológiai és a kő- és kavicsipari kutatásra, fejlesztésre, szakértésre, oktatásra, szabványosításra terjed ki. Publikációinak száma mintegy 220.

1.6.3. KONFIDENCIA JELLEMZŐK

Konfidencia angolul: Confidence
Konfidencia németül: Konfidenz, Vertrauen
Konfidenciaszint angolul: Level of confidence
Konfidenciaszint németül: Konfidenzniveau, Vertrauensniveau
Szignifikanciaszint angolul: Level of significance
Szignifikanciaszint németül: Signifikanzniveau
Konfidencia-terjedelem angolul: Confidence interval
Konfidencia-terjedelem németül: Konfidenzbereich, Vertrauensbereich
Konfidenciahatár angolul: Confidence limit
Konfidenciahatár németül: Konfidenzgrenze, Vertrauensgrenze

1.6.3.1. Bevezetés

A **konfidencia** latin eredetű szó (confidentia = önbizalom, bátorság, megbízhatóság), *Bakos* szerint (1973) a statisztikai jelenségek becslésének megbízhatóságát jelenti. A konfidencia a mérnöki gyakorlatban mind a méretezés, mind az anyag tulajdonságok jellemzése stb. terén gyakran használt fogalom, kifejezés. (MSZ 256-2:1973)

Konfidenciaszintnek azt a kétoldali vizsgálat esetén konfidenciahatárokkal vagy egyoldali vizsgálat esetén konfidenciahatárral kijelölt matematikai statisztikai valószínűséget (sűrűséggörbe alatti területet) nevezzük, amellyel a valószínűségi változó megfelelőnek tartott értékei előfordulnak. (visszavont MSZ 256-2:1973), (MSZ 509:1983 és MSZ 509:1989 visszavont szabványok)

Más szóval a konfidenciaszint a vizsgált tételben a megfelelőségi feltételt kielégítő minták valószínű részaránya.

A konfidenciaszint kapcsolata a szignifikanciaszinttel: $\beta = 1 - \alpha$, illetve $\beta^{\%} = 100 - \alpha^{\%}$, ahol α a szignifikanciaszint.

Szignifikanciaszintnek azt a kétoldali vizsgálat esetén szignifikanciahatárokkal, egyoldali vizsgálat esetén szignifikanciahatárral kijelölt matematikai statisztikai valószínűséget (sűrűséggörbe alatti területet) nevezzük, amellyel a valószínűségi változó meg nem felelő értékei előfordulnak.

Más szóval a szignifikanciaszint a vizsgált tételben a megfelelőségi feltételt (konfidenciahatár) ki nem elégítő minták valószínű részaránya, azaz alulmaradási hányada.

A **konfidencia intervallum** (konfidencia-terjedelem) a matematikai statisztika becsléselméleti fogalma. (*Hartung* et al., 2009)

A matematikában, matematikai statisztikában az intervallumon valamely két adott szám közötti számok, illetve valamely egyenes két adott pontja közötti pontok halmazát értik (visszavont MSZ 256-2:1973), (MSZ 509:1983 és MSZ 509:1989 visszavont szabványok).

A konfidencia intervallum (konfidencia-terjedelem) egy olyan becslési tartomány, amely adott valószínűséggel tartalmazza az ismeretlen paramétert (*Farkas M.* et al., 1979).

A **konfidenciahatár** *kétoldali vizsgálat* esetén a megbízhatósági tartománynak (konfidencia-terjedelemnek, konfidencia intervallumnak) az alsó és felső határa, amelyek közé a vizsgált valószínűségi változónak a becsült paramétere (például az átlagértéke vagy a szórásnégyzete) adott valószínűséggel (adott konfidenciaszinten, például $\beta_2 = 0{,}90$) esik, illetve *egyoldali vizsgálat* esetén a megbízhatósági tartománynak (konfidencia-terjedelemnek, konfidencia intervallumnak) például a felső határa, amely alatt a valószínűségi változónak a becsült paramétere adott valószínűséggel (adott konfidenciaszinten, például $\beta_1 = 0{,}95$) helyezkedik el (visszavont MSZ 256-2:1973), (MSZ 509:1983 és MSZ 509:1989 visszavont szabványok).

1.6.3.2. Az átlagérték és a szórásnégyzet konfidencia jellemzői

Az átlagérték vagy a szórásnégyzet konfidencia-terjedelemébe (konfidencia intervallumába) nem a halmaz valamely tulajdonságának minden eleme, hanem a halmaz valamely tulajdonsága átlagának vagy szórásnégyzetének értéke esik bizonyos valószínűséggel.

1.6.3.2.1. Az átlagérték konfidenciahatárai

A valószínűségi változó *átlagértékének* eloszlási függvénye *szimmetrikus*.

A halmaz valamely *ismert relatív szórású* (V_x) tulajdonságának *ismeretlen* μ *átlagértékét* az n elemszámú $\bar{x}$ átlagértékű, $\sigma_{\bar{x}}^2$ szórásnégyzetű vizsgálati minta vizsgálati eredményeinek normális eloszlást (*Gauss*-féle eloszlást) követő $\bar{x}$ átlagértékéből becsülhetjük, mely esetben a halmaz ismeretlen μ átlagértéke *kétoldali vizsgálat* esetén β_2 valószínűséggel a

$$\mu_{\text{alsó}} = \bar{x} - u_{\beta_2} \times \sigma_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + u_{\beta_2} \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_{\text{felső}}$$

konfidenciahatárok között fekszik, ahol u_{β_2} a normális eloszlás β_2 valószínűséghez (konfidenciaszinthez, megbízhatósági szinthez) tartozó kvantilise. A kvantilist a mérnöki gyakorlatban általában alulmaradási tényezőnek szoktunk nevezni. A standardizált normális eloszlás u_{β_2} alulmaradási tényezőjének értéke a β konfidenciaszint függvényében a matematikai statisztikával foglalkozó könyveknek a normális eloszlás függvényadatait tartalmazó táblázataiban található.

Az u_{β_2} alulmaradási tényező (kvantilis) az alsó és a felső konfidenciahatárral kifejezve:

$$u_{\beta_2} = \frac{\bar{x} - \mu_{\text{alsó}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\mu_{\text{felső}} - \bar{x}}{\sigma_{\bar{x}}}$$

Az irodalomból (*Plate*, 1993) ismert, hogy az n elemszámú vizsgálati minta vizsgálati eredményeinek $\sigma_{\bar{x}}^2$ szórásnégyzete a feltételek szerint egyenlő a halmaz tulajdonsága korábbi, elegendő számú vizsgálatából ismert σ^2 szórásnégyzetének n-edével, azaz $\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2/n$; amelyből a vizsgálati eredmények szórásának ($\sigma_{\bar{x}}$) és a halmaz tulajdonsága ismert szórásának (σ) a kapcsolata: $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$.

Ennek az összefüggésnek a felhasználásával kapjuk, hogy

- *kétoldali vizsgálat* esetén az *ismert relatív szórású* (V_x) normális eloszlású (*Gauss*-eloszlású) halmaz tulajdonsága *átlagának* például $\beta_2 = 1 - \alpha_2 = 0{,}90$ konfidenciaszinthez (megbízhatósági szinthez) tartozó $\mu_{\text{alsó}}$, illetve $\mu_{\text{felső}}$ konfidenciahatára (*1.6.3.1. ábra*):

$$\mu_{\text{alsó}} = \bar{x} - u_{\beta_2=0{,}90} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$\text{illetve } \mu_{\text{felső}} = \bar{x} + u_{\beta_2=0{,}90} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

és a konfidencia-terjedelem (konfidencia intervallum):

$$\mu_{\text{terjedelem}} = \mu_{\text{felső}} - \mu_{\text{alsó}} = u_{\beta_2=0{,}90} \times \frac{2 \times \sigma}{\sqrt{n}}$$

- *egyoldali vizsgálat* esetén az *ismert relatív szórású* (V_x) normális eloszlású (*Gauss*-eloszlású) halmaz tulajdonsága *átlagának* például $\beta_1 = 1 - \alpha_1 = 0{,}95$ konfidenciaszinthez (megbízhatósági szinthez) tartozó $\mu_{\text{alsó}}$, illetve $\mu_{\text{felső}}$ konfidenciahatára:

$$\mu_{\text{alsó}} = \bar{x} - u_{\beta_1=0{,}95} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

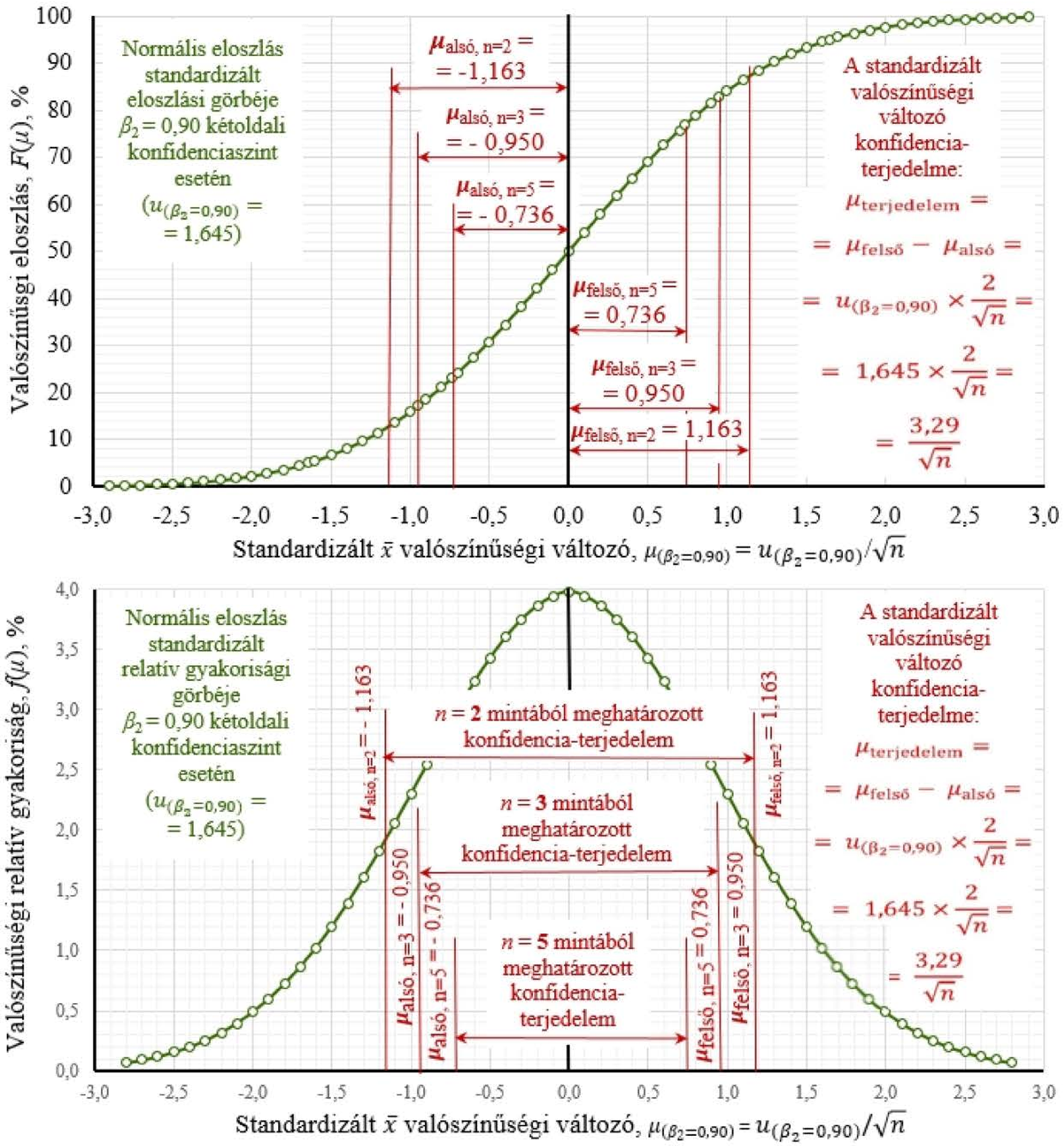
$$\text{illetve } \mu_{\text{felső}} = \bar{x} + u_{\beta_1=0{,}95} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

és a konfidencia-terjedelem (konfidencia intervallum):

$$\mu_{\text{terjedelem}} = \mu_{\text{felső}} - \mu_{\text{alsó}} = u_{\beta_1=0{,}95} \times \frac{2 \times \sigma}{\sqrt{n}}$$

Az $u_{\beta_1=0{,}95}$ és a $u_{\beta_2=0{,}90}$ alulmaradási tényező értéke a $\beta_1 = (1 + \beta_2)/2$ összefüggés folytán egyaránt 1,645, azaz $u_{\beta_1=0{,}95} = u_{\beta_2=0{,}90} = 1{,}645$.

Megjegyzendő, hogy az ismert szórás áttételes fogalom, mert voltaképpen nem a szórás (σ), hanem a relatív szórás (V_x) tekinthető megfelelő körülmények között ismertnek. Az „ismert szórás” (σ) nem egy konstans érték, hanem az ismert relatív szórásból (V_x) és a vizsgálati eredmények átlagából ($\bar{x}$) esetenként számított érték ($\sigma = V_x \times \bar{x}$).



1.6.3.1. ábra: Normális valószínűségi eloszlás konfidencia jellemzői kétoldali $\beta_2 = 0{,}9$ konfidenciaszinten

A halmaz valamely *ismeretlen relatív szórású* (V_x) tulajdonságának *ismeretlen* μ *átlagértékét* az n elemszámú, $f = n - 1$ szabadságfokú, $\bar{x}$ átlagértékű, $s_{\bar{x}}^2$ szórásnégyzetű vizsgálati minta vizsgálati eredményeinek t-eloszlást (*an*-féle eloszlást) követő $\bar{x}$ átlagértékéből becsülhetjük.

Ebben az esetben a halmaz ismeretlen μ átlagértéke *kétoldali vizsgálat* esetén β_2 valószínűséggel a

$$\mu_{\text{alsó}} = \bar{x} - t_{\beta_{2;f}} \times s_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + t_{\beta_{2;f}} \times s_{\bar{x}} = \mu_{\text{felső}}$$

konfidenciahatárok között fekszik, ahol

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \times \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

a vizsgálati minta szórásnégyzete, más szóval a tapasztalati (empirikus, korrigált) szórás négyzete és $t_{\beta_{2;f}}$ a standardizált *t*-eloszlás β_2 valószínűséghez (konfidenciaszinthez, megbízhatósági szinthez) tartozó kvantilise, a *Student*-tényezőnek nevezett alulmaradási tényezője. A standardizált *t*-eloszlás $t_{\beta_{2;f}}$ alulmaradási tényezőjének, a *Student*-tényezőnek az értéke a β konfidenciaszint és az $f = n - 1$ szabadságfok függvényében a matematikai statisztikával foglalkozó könyveknek a *t*-eloszlás függvényadatait tartalmazó táblázataiban és szabványokban (például: visszavont MSZ 256-2:1973) található.

Minthogy a vizsgálati eredmények szórásának ($s_{\bar{x}}$) és a halmaz tulajdonsága ismeretlen szórásának ($\tilde{s}_{\bar{x}}$) a kapcsolata (*Plate*, 1993): $s_{\bar{x}} = \frac{\tilde{s}_{\bar{x}}}{\sqrt{n}}$, az $\tilde{s}_{\bar{x}}$ értékkel kifejezett $s_{\bar{x}}$ szórás behelyettesítése után a $t_{\beta_{2;f}}$ alulmaradási tényező (*Student*-tényező) a halmaz alsó és felső konfidenciahatárával kifejezve:

$$t_{\beta_{2;f}} = \frac{\bar{x} - \mu_{\text{alsó}}}{\tilde{s}_{\bar{x}}} \times \sqrt{n} = \frac{\mu_{\text{felső}} - \bar{x}}{\tilde{s}_{\bar{x}}} \times \sqrt{n}$$

Mindezek felhasználásával adódik, hogy

- *kétoldali vizsgálat* esetén az *ismeretlen relatív szórású* (V_x) *t*-eloszlású (*Student*-eloszlású) halmaz tulajdonsága *átlagának* például $\beta_2 = 1 - \alpha_2 = 0{,}90$ konfidenciaszinthez (megbízhatósági szinthez) tartozó $\mu_{\text{alsó}}$, illetve $\mu_{\text{felső}}$ konfidenciahatára:

$$\mu_{\text{alsó}} = \bar{x} - t_{\beta_2=0{,}90;f} \times \frac{\tilde{s}_{\bar{x}}}{\sqrt{n}},$$

$$\text{illetve } \mu_{\text{felső}} = \bar{x} + t_{\beta_2=0{,}90;f} \times \frac{\tilde{s}_{\bar{x}}}{\sqrt{n}}$$

és a konfidencia-terjedelem (konfidencia intervallum):

$$\mu_{\text{terjedelem}} = \mu_{\text{felső}} - \mu_{\text{alsó}} = t_{\beta_2=0,90;f} \times \frac{2 \times \tilde{s}_{\bar{x}}}{\sqrt{n}}$$

- *egyoldali vizsgálat* esetén az *ismeretlen relatív szórású* (V_x) *t*-eloszlású (*Student*-eloszlású) halmaz tulajdonsága *átlagának* például $\beta_1 = 1 - \alpha_1 = 0,95$ konfidenciaszinthez (megbízhatósági szinthez) tartozó $\mu_{\text{alsó}}$, illetve $\mu_{\text{felső}}$ konfidenciahatára:

$$\mu_{\text{alsó}} = \bar{x} - t_{\beta_1=0,95;f} \times \frac{\tilde{s}_{\bar{x}}}{\sqrt{n}},$$

$$\text{illetve } \mu_{\text{felső}} = \bar{x} + t_{\beta_1=0,95;f} \times \frac{\tilde{s}_{\bar{x}}}{\sqrt{n}}$$

és a konfidencia-terjedelem (konfidencia intervallum):

$$\mu_{\text{terjedelem}} = \mu_{\text{felső}} - \mu_{\text{alsó}} = t_{\beta_1=0,95;f} \times \frac{2 \times \tilde{s}_{\bar{x}}}{\sqrt{n}}$$

Egyazon f szabadságfok (n mintaelemszám) esetén a $t_{\beta_1=0,95;f}$ és a $t_{\beta_2=0,90;f}$ *Student*-tényező értéke a $\beta_1 = (1 + \beta_2)/2$ összefüggés folytán azonos, például $f = 4$ ($n = 5$) esetén 2,132, azaz $t_{\beta_1=0,95;f} = t_{\beta_2=0,90;f} = 2,132$.

Valamely halmaz tulajdonságának átlagértéke adott konfidencia-terjedelmének biztosításához szükséges mintaelemszám – a β konfidenciaszinthez (megbízhatósági szinthez) tartozó alulmaradási tényező (például u vagy t, jelöljük általánosságban η betűvel) függvényében – a következő összefüggéssel számítható ki:

$$n_{\text{szükséges}} \geq \left(\frac{2 \times \eta_\beta}{\mu_{\text{terjedelem}}}\right)^2,$$

Például *ismert relatív szórás* (V_x), illetve a normális eloszlás esetén az átlagérték legfeljebb $\mu_{\text{terjedelem}} = 1,4$ értékű standardizált konfidencia-terjedelmének eléréséhez $\beta_2 = 0,90$ ($\beta_1 = 0,95$) konfidenciaszinten (alulmaradási tényező: $\eta_{\beta_2} = u_{\beta_2} = 1,645$) legalább 6 darab mintaelemre (vizsgálati próbatestre) van szükség ($n_{\text{szükséges}} \geq 5,52$).

Ismeretlen relatív szórás (V_x), illetve a *t*-eloszlás esetén annyival bonyolultabb a szükséges mintaelemszám kiszámítása, hogy az alulmaradási tényező (*Student*-tényező) maga is a mintaelemszám függvénye.

Példánk esetén a megoldás 8 darab szükséges mintaelem, mert $\beta_2 = 0{,}90$ ($\beta_1 = 0{,}95$) konfidenciaszinten $n = 8$ esetén a *Student*-tényező: $\eta_{\beta_2} = t_{\beta_2=0{,}90;f=7} = 1{,}895$, és így $n_{\text{szükséges}} \geq (2\times 1{,}895/1{,}4)^2 = 7{,}33$

Számpéldák a halmaztulajdonság μ átlagértéke konfidencia jellemzőinek számítására:

Első számpélda. Legyen valamely típusú, minden tekintetben azonos feltételekkel készített és vizsgált kéttámaszú előregyártott feszített vasbeton födémpalló halmaz adott terhelés mellett, támaszközépen, 28 napos korban mért lehajlásának a korábbi, elegendő számú vizsgálatból *ismert relatív szórása (variációs együtthatója)* $V_x = 0{,}185$. Vegyünk az időszerű gyártás során e födémpalló halmazból $n = 5$ darab födémpallót, és vizsgáljuk meg adott terhelés mellett, támaszközépen, 28 napos korban a lehajlását (*1.6.3.2. ábra*). Ha a mért lehajlások átlagértéke $\bar{x} = 3{,}87$ mm, amelyhez tartozó – a korábbi, elegendő számú vizsgálatból *ismert relatív szórással* számított – szórás $\sigma = 0{,}185\times 3{,}87 = 0{,}716$ mm, akkor például $\beta_2 = 0{,}90$ *kétoldali* konfidenciaszinten (az alulmaradási tényező értéke a standardizált normális eloszlás kétoldali alulmaradásra vonatkozó táblázatából: $u_{\beta_2=0{,}90} = 1{,}645$) a 28 napos korú födémpalló halmaz átlagos lehajlásának ($\mu_{\text{terjedelem}}$) konfidencia-terjedelme (konfidencia intervalluma, becslési tartománya), amelybe az időszerű gyártás adott időszakában készült födémpallók átlagos lehajlása 90%-os valószínűséggel esik, mm mértékegységben:

$$\mu_{\text{alsó}} = 3{,}87 - 1{,}645 \times \frac{0{,}716}{\sqrt{5}} = 3{,}34 \leq \mu \leq 4{,}40 = 3{,}87 + 1{,}645 \times \frac{0{,}716}{\sqrt{5}} = \mu_{\text{felső}},$$

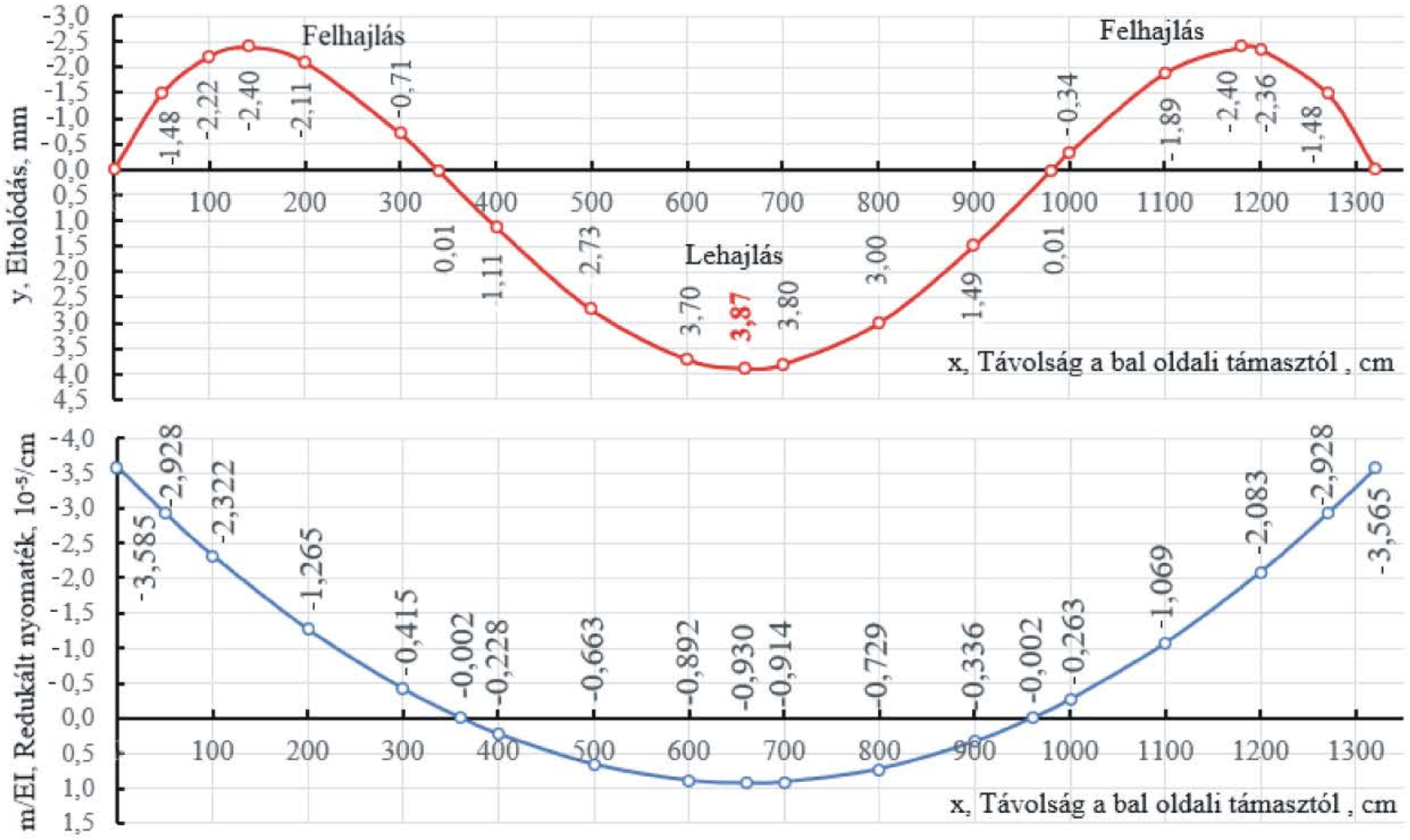
amelyből: $\mu_{\text{terjedelem}} = \mu_{\text{felső}} - \mu_{\text{alsó}} = 4{,}40 - 3{,}34 = 1{,}06$ mm;

és ugyancsak $\beta_2 = 0{,}90$ *kétoldali* megbízhatósági szinten a konfidencia-terjedelem mm mértékegységben (konfidenciaszinten a konfidencia intervallum), ha a vizsgált födémpallók száma csak $n = 3$ darab, és a mért lehajlások átlagértéke most is $\bar{x} = 3{,}87$ mm:

$$\mu_{\text{alsó}} = 3{,}87 - 1{,}645 \times \frac{0{,}716}{\sqrt{3}} = 3{,}19 \leq \mu \leq 4{,}55 = 3{,}87 + 1{,}645 \times \frac{0{,}716}{\sqrt{3}} = \mu_{\text{felső}},$$

amelyből: $\mu_{\text{terjedelem}} = \mu_{\text{felső}} - \mu_{\text{alsó}} = 4{,}55 - 3{,}19 = 1{,}36$ mm.

Ugyanezeket a $\mu_{\text{felső}}$ konfidenciahatárokat kapjuk, ha *egyoldali vizsgálattal* azt kérdezzük, hogy a szóban forgó födémpallók átlagos lehajlása 28 napos korban, támaszközépen, $\beta_1 = 0{,}95$ valószínűséggel ($u_{\beta_1=0{,}95} = 1{,}645$) mely értéket nem lépi túl, ha a *relatív szórás ismert* (*1.6.3.1. ábra*).



1.6.3.2. ábra: Előregyártott feszített vasbeton födémpalló eltolódási (felül) és redukált nyomatéki (alul) ábrája (*Kausay*, 1982)

A fenti számpéldában és az *1.6.3.1. ábrán* is látni, hogy normális eloszlás esetén az n mintaelemszám csökkenésével a halmaz μ átlagértékének konfidencia-terjedelme ($\mu_{\text{terjedelem}}$) növekszik, mint azt könyvében *Plate* (1993) és szerzőtársaival *Hartung* (2009) is említi.

Második számpélda. Ha valamely típusú, minden tekintetben azonos feltételekkel készített kéttámaszú előregyártott feszített vasbeton födémpalló halmaz adott terhelés mellett, támaszközépen, 28 napos korban mért lehajlásának *relatív szórása ismeretlen*, és e födémpalló

halmazból vett $n = 5$ darab födémpalló adott terhelés mellett, támaszközépen, 28 napos korban mért lehajlásának átlagértéke $\bar{x} = 3{,}87$ mm és szórása $s = 0{,}716$ mm, akkor például $\beta_2 = 0{,}90$ *kétoldali* konfidenciaszinten, $f = 4$ szabadságfok mellett (az alulmaradási tényező értéke a t-eloszlás kétoldali alulmaradásra vonatkozó táblázatából: $t_{\beta_2=0{,}90;\ f=4} = 2{,}132$) a 28 napos korú födémpalló halmaz átlagos lehajlásának konfidencia-terjedelme (konfidencia intervalluma, becslési tartománya), amelybe a időszerű gyártás adott időszakában készült födémpallók átlagos lehajlása 90%-os valószínűséggel esik:

$$\mu_{\text{alsó}} = 3{,}87 - 2{,}132 \times \frac{0{,}716}{\sqrt{5}} = 3{,}19 \leq \mu \leq 4{,}55 = 3{,}87 + 2{,}132 \times \frac{0{,}716}{\sqrt{5}} = \mu_{\text{felső}},$$

amelyből: $\mu_{\text{terjedelem}} = \mu_{\text{felső}} - \mu_{\text{alsó}} = 4{,}55 - 3{,}19 = 1{,}36$ mm;

és ugyancsak $\beta_2 = 0{,}90$ *kétoldali* megbízhatósági szinten (konfidenciaszinten) a konfidencia-terjedelem, ha a vizsgált födémpallók száma csak $n = 3$ darab (a szabadság fok: $f = 2$), és a mért lehajlások átlagértéke ($\bar{x}$) és szórása (s) most is $\bar{x} = 3{,}87$ mm és $s = 0{,}716$ mm, az alulmaradási tényező értéke pedig a t-eloszlás kétoldali alulmaradásra vonatkozó táblázatából: $t_{\beta_2=0{,}90;\ f=2} = 2{,}920$:

$$\mu_{\text{alsó}} = 3{,}87 - 2{,}920 \times \frac{0{,}716}{\sqrt{3}} = 2{,}66 \leq \mu \leq 5{,}08 = 3{,}87 + 2{,}920 \times \frac{0{,}716}{\sqrt{3}} = \mu_{\text{felső}},$$

amelyből: $\mu_{\text{terjedelem}} = \mu_{\text{felső}} - \mu_{\text{alsó}} = 5{,}08 - 3{,}87 = 1{,}21$ mm.

Ugyanezeket a $\mu_{\text{felső}}$ konfidenciahatárokat kapjuk, ha ugyanakkora n mintaelemszám esetén *egyoldali vizsgálattal* azt kérdezzük, hogy a szóban forgó födémpallók átlagos lehajlása 28 napos korban, támaszközépen, $\beta_1 = 0{,}95$ valószínűséggel ($t_{\beta_1=0{,}95;\ f=4} = 2{,}132$, illetve $t_{\beta_1=0{,}95;\ f=2} = 2{,}920$) mely értéket nem lépi túl, ha a *relatív szórás ismeretlen*.

A fenti példában látni, hogy t-eloszlás esetén az n mintaelemszám csökkenésével a halmaz μ átlagértékének konfidencia-terjedelme ($\mu_{\text{terjedelem}}$) csökken.

Fentiekben a halmaz normális eloszlású tulajdonsága szimmetrikus eloszlást követő átlagértékének konfidencia jellemzőit tanulmányoztuk. A valószínűségi változó szórásnégyzetének konfidencia jellemzői – az eltérő eloszlási függvényalak következtében – ettől eltérők.

1.6.3.2.2. A szórásnégyzet konfidenciahatárai

A normális eloszlású valószínűségi változó *szórásnégyzetének* eloszlási függvénye *nem szimmetrikus,* hiszen a szórásnégyzet mindig pozitív érték, alsó határértéke nulla, felső határértéke pedig gyakorlatilag nincs. A jelenség a χ^2-eloszlással írható le.

A halmaztulajdonság ismert μ_x átlagértéke és ismert σ_x^2 szórásnégyzete esetén a χ^2 értéke a halmaztulajdonság ismert szórásnégyzetének (σ_x^2), a vizsgálati minta valószínűségi változója (x) – a halmaztulajdonság ismert μ_x átlagértékével számított – szórásnégyzetének ($\tilde{s}_x^2$) és a mintaelemszámnak (n) képezi a függvényét:

$$\chi^2 = \frac{\tilde{s}_x^2}{\sigma_x^2} \times n$$

A minta x valószínűségi változójának μ_x átlagértékkel számított szórásnégyzete ($\tilde{s}_x^2$) a mintaelemszámmal (n) egyező szabadságfokkal (f) kifejezhető, azaz $f = n$:

$$\tilde{s}_x^2 = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)^2$$

A minta valószínűségi változója szórásnégyzetének ($\tilde{s}_x^2$) konfidenciahatárai:

$$s_{x\,\text{alsó}}^2 = \chi_{n,\text{alsó}}^2 \times \frac{\sigma_x^2}{n} \leq \tilde{s}_x^2 \leq \chi_{n,\text{felső}}^2 \times \frac{\sigma_x^2}{n} = s_{x\,\text{felső}}^2$$

A χ^2 értékének alsó és felső konfidenciahatárát a β_2 konfidenciaszint (megbízhatósági szint) és az f szabadságfok függvényében táblázatból vehetjük (*1.6.3.1. táblázat*)

1.6.3.1. táblázat: A χ^2-eloszlású valószínűségi változó χ^2 értékének alsó és felső konfidenciahatára. Részlet *Erich J. Plate* könyvének (1993) 9.2-3 táblázatából (lásd még: ISO 12491:1997)

f	$\beta_1 = 0{,}95$; $\beta_2 = 0{,}90$		$\beta_1 = 0{,}975$; $\beta_2 = 0{,}95$		$\beta_1 = 0{,}995$; $\beta_2 = 0{,}99$	
	$\chi^2_{\text{alsó}}$	$\chi^2_{\text{felső}}$	$\chi^2_{\text{alsó}}$	$\chi^2_{\text{felső}}$	$\chi^2_{\text{alsó}}$	$\chi^2_{\text{felső}}$
2	0,10	5,99	0,05	7,38	0,01	10,60
3	0,35	7,81	0,22	9,35	0,07	12,84
4	0,71	9,49	0,48	11,14	0,21	14,86
5	1,15	11,07	0,83	12,83	0,41	16,75
6	1,63	12,59	1,24	14,45	0,68	18,55

A halmaztulajdonság ismeretlen μ_x átlagértéke esetén a halmaztulajdonság ismert σ_x^2 szórásnégyzete mellett – nem a minta x valószínűségi változójának μ_x átlagértékkel számított szórásnégyzetét kell kiszámítani, hanem – a minta saját $\bar{x}$ átlagértékével kell a minta $f = n - 1$ szabadságfokú tapasztalati szórásnégyzetét meghatározni:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \times \sum_{\text{i=1}}^{\text{n}} (x_\text{i} - \bar{x})^2$$

Ebben az estben a minta valószínűségi változója szórásnégyzetének (s_x^2) konfidenciahatárai:

$$s^2_{\text{x alsó}} = \chi^2_{\text{f,alsó}} \times \frac{\sigma_\text{x}^2}{n-1} \leq s_x^2 \leq \chi^2_{\text{f,felső}} \times \frac{\sigma_\text{x}^2}{n-1} = s^2_{\text{x felső}}$$

Számpéldák a vizsgálati eredmények szórásnégyzete konfidencia jellemzőinek számítására:

Harmadik számpélda. Például, ha valamely kéttámaszú előregyártott feszített vasbeton gerenda gyártmány 28 napos kori támaszközepi lehajlásának hosszú időn keresztül megfigyelt átlagértéke $\mu_x = 4{,}1$ mm, és – ismert $V_x = 0{,}185$ értékű relatív szórása folytán – ismert szórásnégyzete: $\sigma_x^2 = (V_x \times \mu_x)^2 = 0{,}575$ mm^2, akkor például $\beta_1 = 0{,}95$ konfidenciaszint és például

- $n = 6$ mintaelemszám ($f = n$) esetén az *1.6.3.1. táblázat* szerint a χ^2 értékének felső konfidenciahatára $\chi^2_{\text{felső}} = 12{,}59$, amelyből az $n = 6$ darab vizsgált feszített vasbeton gerenda lehajlása szórásnégyzetének ($\tilde{s}_x^2$) felső konfidenciahatára: $s^2_{\text{x felső}} = 12{,}59 \times 0{,}575/6 = 1{,}21$ mm^2;
- $n = 3$ mintaelemszám ($f = n$) esetén az *1.6.3.1. táblázat* szerint a χ^2 értékének felső konfidenciahatára $\chi^2_{\text{felső}} = 7{,}81$, amelyből az $n = 3$ darab vizsgált feszített vasbeton gerenda lehajlása szórásnégyzetének ($\tilde{s}_x^2$) felső konfidenciahatára: $s^2_{\text{x felső}} = 7{,}81 \times 0{,}575/3 = 1{,}50$ mm^2.

Negyedik számpélda. Ha a harmadik példabeli kéttámaszú előregyártott feszített vasbeton gerenda gyártmány 28 napos kori támaszközepi lehajlásának átlagértéke (μ_x) ismeretlen, de szórásnégyzete ismert ($\sigma_x^2 = 0{,}575$ mm^2), akkor például $\beta_1 = 0{,}95$ konfidenciaszint és például

- $f = n - 1 = 5$ szabadságfok esetén az *1.6.3.1. táblázat* szerint a χ^2 értékének felső konfidenciahatára $\chi^2_{\text{felső}} = 11{,}07$, amelyből az $n = 6$ darab vizsgált feszített vasbeton gerenda lehajlása szórásnégyzetének ($\tilde{s}_x^2$) felső konfidenciahatára: $s^2_{\text{x felső}} = 11{,}07 \times 0{,}575/5 = 1{,}27$ mm^2;
- $f = n - 1 = 2$ szabadságfok esetén az *1.6.3.1. táblázat* szerint a χ^2 értékének felső konfidenciahatára $\chi^2_{\text{felső}} = 5{,}99$, amelyből az $n = 3$ darab vizsgált feszített vasbeton gerenda lehajlása szórásnégyzetének ($\tilde{s}_x^2$) felső konfidenciahatára: $s^2_{\text{x felső}} = 5{,}99 \times 0{,}575/2 = 1{,}72$ mm^2.

A harmadik és negyedik számpéldában látjuk, hogy a χ^2-eloszlás esetén az n mintaelemszám csökkenésével az x valószínűségi változó μ_x, illetve $\bar{x}$ átlagértékkel számított $\tilde{s}_x^2$, illetve s_x^2 szórásnégyzetének felső konfidenciahatára növekszik.

Felhasznált irodalom

ISO 12491:1997 Statistical methods for quality control of building materials and components

MSZ 256-2:1973 Mérési sorozatok matematikai-statisztikai feldolgozása. Konfidencia-határok. Visszavont szabvány

Stange, K. – Henning, H.-J.: Graf/Henning/Stange. Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. Springer-Verlag. Berlin/Heidelberg/New York, 1966.

Plate, E. J.: Statistik und angewandte Wahrscheinlichkeitslehre für Bauingenieure. Ernst & Sohn. Verlag für Architektur und technische Wissenschaften. Berlin, 1993.

Hartung, J. – Elpelt, B. – Klösener, K.-H.: Statistik. Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. München, 2009.

Engelhardt, A.: Crashkurs Statistik. A szerző saját kiadása. Printed in Poland by Amazon Fulfillment. Wroclaw, 2020.

Kausay T.: Repedésmentes feszített vasbetontartó regressziós eltolódási függvényének számítása zsebszámítógéppel. Építőanyag. XXXIV. évfolyam. 1982. 10. szám. pp. 384-391.

Budapest, 2021. november 3.

Ugrás a

KÖVETKEZŐ FEJEZET | TARTALOMJEGYZÉK

a hivatkozott

JOGSZABÁLYOK | SZABVÁNYOK, EIŐÍRÁSOK | IRODALOM

fejezetének elejére

OC-GÖRBE, MŰKÖDÉSI JELLEGGÖRBE, ELFOGADÁSI JELLEGGÖRBE

Németül: OC-kurve, Annahmekennlinie, OC-Funktion
Angolul: Operating characteristic curve
Franciául : Caractéristique de fonctionnement, courbe d'efficacité

Az OC-görbe fogalma

Az OC-görbe (nevezik működési vagy elfogadási jelleggörbének is) valamely p alulmaradási hányadú tétel $A(p)$ elfogadási valószínűségét adja meg, ha a mintavételek n száma és a megengedett nem megfelelő minták $k_{megengedett}$ száma adott.

Annak valószínűsége, hogy az N elemű, M nem megfelelő elemet tartalmazó halmazból visszatevés nélküli reprezentatív mintavétellel nyert n elemű mintában a nem megfelelő elemek száma k, a P_k hipergeometrikus valószínűségeloszlással számítható ki:

$$P_k = \frac{\binom{M}{k} \times \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

A valószínűséget pontosan leíró hipergeometrikus eloszlás esetén a visszatevés nélküli mintavétel következtében minden egyes mintaelem kivételekor megváltozik a halmaz eredeti $p = M/N$ alulmaradási hányada. A hipergeometrikus eloszlás felhasználásakor nehézséget jelent, hogy nagy N számok mellett a valószínűségek kiszámítása igen körülményes. Ezért azzal a közelítő feltételezéssel szokás élni, hogy a minta elemei csak az adott elem vizsgálatának idejére kerülnek ki a halmazból. Az ilyen visszatevéses reprezentatív mintavétel esetén a nem megfelelő elemek részaránya a halmazban változatlan marad, azaz $p = M/N =$ konstans (*Kausay T.* 1970). Ebben az esetben a visszatevéses mintavétel feltételezése mellett a keresett valószínűséget a könnyebben meghatározható

$$B_k = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

binomiális valószínűségeloszlás fejezi ki, ahol $k = 0, 1, 2, \ldots n$; $0 \leq p = \leq 1{,}0$.

Példaként vizsgáljuk meg, mi a valószínűsége (B_k) annak, hogy különböző p alulmaradási hányadú tételekből $n = 100$ számú mintát véve a nem megfelelő minták száma k. A választ a 100-adrendű, p paraméterű binomiális valószínűségeloszlás gyakoriságfüggvényei adják meg (*1. ábra*). A binomiális eloszlás diszkrét eloszlás, de szemléletesség kedvéért az *1. és 2. ábrán* az egyes valószínűségeket ábrázoló pontokat összekötöttük. Az *1. ábrán* látni, hogy a binomiális eloszlás nem szimmetrikus, hanem egyre inkább jobbra elnyúló (jobbra egyre ferdébb), ha p értéke tart a nullához. A binomiális eloszlás a $p = 0{,}5$ értéknél szimmetrikus, és attól $p = 0{,}0$, illetve $p = 1{,}0$ felé távolodva egyre ferdébb (jobbra, illetve balra). Ennek következménye, hogy esetünkben – lévén jobbra ferdülő eloszlás – a modusznál nagyobb a medián, és a mediánnál nagyobb a valószínűségi változók (k) számtani középérték. A modusz a legnagyobb B_k valószínűséghez tartozó valószínűségi változó (k_{modusz}), itt a gyakoriságfüggvénynek maximuma, az eloszlásfüggvénynek inflexiós pontja van. A medián az a valószínűségi változó ($k_{medián}$), amelynél az eloszlásfüggvény $\Sigma B_k = 0{,}5$ értéket vesz fel, feltéve, hogy ilyen létezik (*Vincze E.* 1972, *Vincze I.* 1958).

A binomiális valószínűségeloszlás gyakoriságfüggvényeiből meghatározhatók az eloszlásfüggvények, amelyek azt fejezik ki, mi a valószínűsége (ΣB_k) annak, hogy különböző p alulmaradási hányadú tételekből példánk szerint $n = 100$ számú mintát véve, a nem megfelelő minták száma legfeljebb $k_{megengedett}$ (*2. ábra*).

A *2. ábra* valószínűségi eloszlásfüggvényeiből leolvasható, hogy a tételből $n = 100$ számú mintát véve, annak a valószínűsége, hogy a nem megfelelő minták megengedett száma – mint a tétel elfogadásának feltétele – $k_{megengedett} = 5$, például $p = 0{,}01$ alulmaradási hányadú tétel esetén 0,9995, $p = 0{,}02$ alulmaradási hányadú tétel esetén 0,9845, $p = 0{,}03$ alulmaradási hányadú tétel esetén 0,9192 stb. A *2. ábra* $k_{megengedett} = 5$ abszcisszájához tartozó (p, ΣB_k) értékpárokat új koordinátarendszerben ábrázolva és folyamatos vonallal összekötve, a $\Sigma B_k = A(p)$ elfogadási valószínűségeket kapjuk meg a tétel tényleges p alulmaradási hányada függvényében (*3. ábra* középső görbe). Az így megszerkesztett *3. ábra* szerinti függvényt nevezzük OC-görbének. A görbe alatti tartomány az elfogadási feltételt kielégítő esetek megjelenési helye.

Az OC-görbéből tehát például azt olvashatjuk le, mi a valószínűsége annak, hogy a p (például 0,05) alulmaradási hányadú tételből kivett n (például 100) számú mintában a megengedett nem megfelelő minták száma legfeljebb k, azaz $k_{megengedett}$ (például 5). Ebben az esetben a tételt éppen elfogadjuk, aminek a valószínűsége a példánkban $\Sigma B_k = A(p) = 0{,}616$.

Az OC-görbét három paraméter határozza meg: a valószínűségeloszlás függvény típusa (esetünkben binomiális), amely a p, n, k változók közötti kapcsolatot fejezi ki, a mintavételek száma és a megengedett nem megfelelő minták száma. Ha adott n mintavételi szám (esetünkben $n = 100$) és adott p tényleges alulmaradási hányad esetén a megengedett nem megfelelő minták száma növekszik (a *3. ábrán* $k_{megengedett} = 3 \rightarrow 7$), akkor az $A(p)$ elfogadási valószínűség növekszik. Ha adott nem megfelelő minta szám (esetünkben $k_{megengedett} = 5$) és adott p tényleges alulmaradási hányad esetén az n mintavételi szám növekszik (a *4. ábrán* $n = 50 \rightarrow 200$), akkor az $A(p)$ elfogadási valószínűség csökken.

A minták nem megfelelőségének feltétele és a megengedett nem megfelelő minták száma (részaránya) építőanyag fajtánként és szabványonként változik. Például szilárdsági szempontból nem megfelelő a beton próbatest, ha nyomószilárdsága kisebb, mint az f_{ck} előírt jellemző érték, és a megengedett nem megfelelő minták száma $n = 100$ esetből $k_{megengedett} = 5$ (MSZ 4798-1:2004); szilárdsági szempontból nem megfelelő a B500 jelű bordázott hegeszthető betonacél pálca, ha folyáshatárának jellemző értéke kisebb, mint $0{,}97 \times R_e = 0{,}97 \times 500 = 485$ N/mm^2 és szakítószilárdsága kisebb, mint $0{,}97 \times R_m = 0{,}97 \times 600 = 582$ N/mm^2, és a megengedett nem megfelelő minták száma $n = 100$ esetből $k_{megengedett} = 5$ (MSZ 339:2008.10.06. szabványjavaslat) stb.

OC-görbe a beton nyomószilárdság szerinti megfelelőségének értékelésére

A CEB-CIB-FIP-RILEM munkabizottsága 1975-ben a „Recommended Principles for the Control of Quality and the Judgement of Acceptability of Concrete" című ajánlásában megadta, és 1978-ban a betonszerkezetekre vonatkozó CEB-FIP modell-kódban közzétette az OC-görbék határvonalait, amelyek a kétszeres valószínűségi koordinátarendszerben egyenesek (CEB-FIP 1978, *Palotás L.* 1979, *Windisch A. – Szalai K.* 1982, *Windisch A. – Balázs Gy.* 1983, *György L.* - MÉASZ ME-04.19:1995, 6.3.4.4.4. szakasz). E koordinátarendszer hasonlít a *Gauss*-papírhoz (*Gauss*-hálóhoz), ordináta tengelye a *Gauss*-féle normáleloszlás eloszlásfüggvényének inverz függvénye szerint készült, de abszcissza tengelye nem egyenletes és nem logaritmikus, hanem feltehetőleg logaritmikus normális beosztású (*5. és 6. ábra*). Az *5. és 6. ábrán* az alsó határvonal alatti terület a gazdaságtalan (túl biztonságos) megoldások tartománya, a felső határvonal feletti terület a nem biztonságos megoldások tartománya.

Taerwe, L. 1986-ban a CEB-FIP – transzformált koordinátarendszerben – egyenes határvonalait görbe vonalakkal helyettesítette (*5.*, illetve *6. ábra*). A felső határgörbét (a nem biztonságos tartomány határgörbéjét) úgy szerkesztette meg, hogy arra fennáll az $p \times A(p) = 0{,}05$ egyenlőség (például 0,05×1,0; 0,1×0,5; 0,2×0,25; 0,5×0,1). Elfogadási feltételeinek OC-görbéit (transzformált koordinátarendszerben közel egyenesek) a (0,1; 0,5) koordinátájú pontban érintőlegesen a felső határgörbéhez illesztette (*6. ábra*). A *6. ábrán* feltüntetett $n = 15$, $\lambda = 1{,}48$ paraméterű *Taerwe*-féle OC-görbe a vizsgálati eredmények közötti gyenge összefüggés (egymástól nem teljesen független eredmények) esetén érvényes. Ezt alkalmazza az MSZ EN 206-1:2002 betonszabvány a folyamatos gyártás nyomószilárdsági megfelelőségének 1. feltételeként, és átvette az MSZ 4798-1:2004 nemzeti alkalmazási dokumentum is.

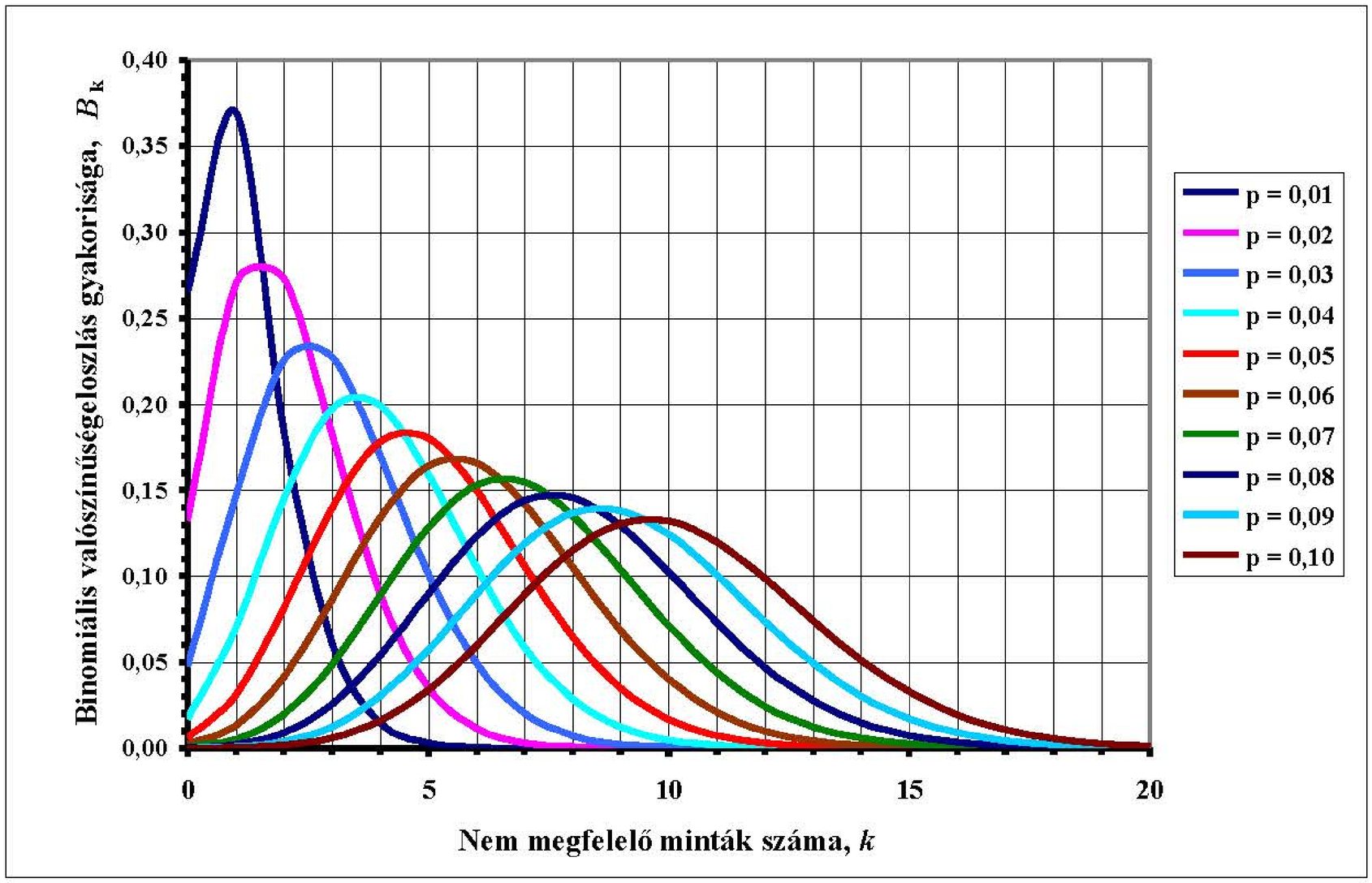
A *6. ábrán* – összehasonlításul – a visszavont MSZ 4720-2:1980 szabvány elfogadási feltételének OC-görbéjét is megrajzoltuk. Az MSZ 4720-2:1980 szabvány szilárdsági előírása azon a feltételezésen alapult, hogy a szabványos betonok variációs tényezője (a szilárdság szórása osztva az átlagos nyomószilárdsággal) 0,15, és szilárdság eloszlása a *Gauss*-féle normális eloszlásnak felel meg (MÉÁSZ ME-04.19:1995, 6.3.4.4.3. szakasz).

A *6. ábrán* kitűnik, hogy míg az MSZ 4720-2:1980 szabvány szerinti átadás-átvételi eljárásban $n = 15$ minta esetén az elfogadási-visszautasítási valószínűség a kritikusan megfelelő betonra (alulmaradási hányad 5 %)[1] nézve közelítőleg 40-60 % volt, addig a *Taerwe*-féle OC-görbét követő MSZ EN 206-1:2002 és MSZ 4798-1:2004 szabványok szerint a folyamatos gyártás során ugyancsak $n = 15$ minta esetén az átadás-visszautasítás valószínűsége a kritikusan megfelelő betonnál (alulmaradási hányad 5 %) közelítőleg 70-30 % (*Kausay T.* 2006 és 2007).

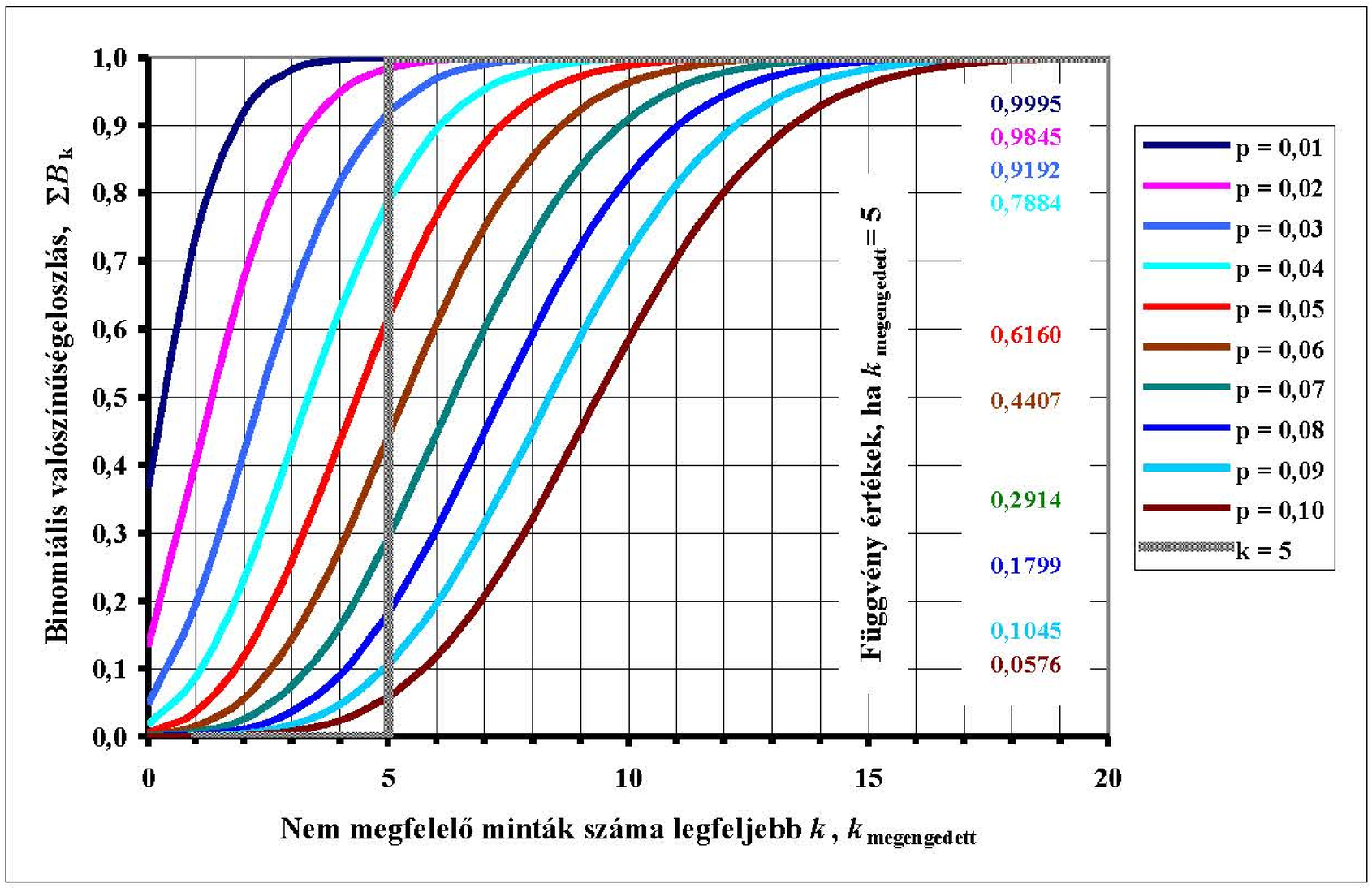
Az új betonszabványokban (MSZ EN 206-1:2002 és MSZ 4798-1:2004) a folyamatos gyártás nyomószilárdsági megfelelőségének 1. feltételében szereplő, az $n = 15$ mintaszámhoz tartozó $\lambda_{n=15} = 1{,}48$ értékű alulmaradási tényező lényegében a korábbi betonszabványban (MSZ 4720-2:1980) szereplő *Student*-tényező szerepét tölti be. A *Student*-tényező értéke (t_n) a mintaszámtól függött, értéke a korábbi betonszabványban minden esetben legalább $t_\infty = 1{,}645$ ($n = \infty$), de kis elemszámú minta esetén ennél lényegesen nagyobb volt. Az új betonszabványok – ezen a ponton legalábbis – egyértelműen a gyártónak kedveznek, hiszen minél kisebb az $f_{ck} = f_{cm} - \lambda_n \times s_n$ összefüggésben a szorzóként szereplő λ_n, illetve t_n alulmaradási tényező, adott átlagos nyomószilárdság (f_{cm}) és szórás (s_n) esetén annál nagyobb jellemző érték (f_{ck}) adódik. Az új és a régi betonszabványok megfelelőségi feltételrendszere alapvetően különbözik, és ez az OC-görbék eltérő elhelyezkedésében is megmutatkozik: a régi szabvány a beépített beton nyomószilárdságát egy szúrópróbaszerűen is alkalmazható megfelelőségi feltétellel biztosította, az új szabványok pedig egy folyamatos nyomon követést és utólagos javítást feltételező – de azt elő nem író – minőségbiztosítási rendszer részeként alkalmazható megfelelőségi feltétellel kívánják biztosítani. A beton valamely nyomószilárdsági osztályát az európai szabvány szerint kisebb biztonsággal, kisebb nyomószilárdságokkal lehet elérni, mint a régi MSZ 4720-2:1980, vagy akár a régi DIN 1084:1988 és DIN 1045:1988 szabvánnyal lehetett (*Zäschke, W.* 1994, *Fischer L.* 1999).

---

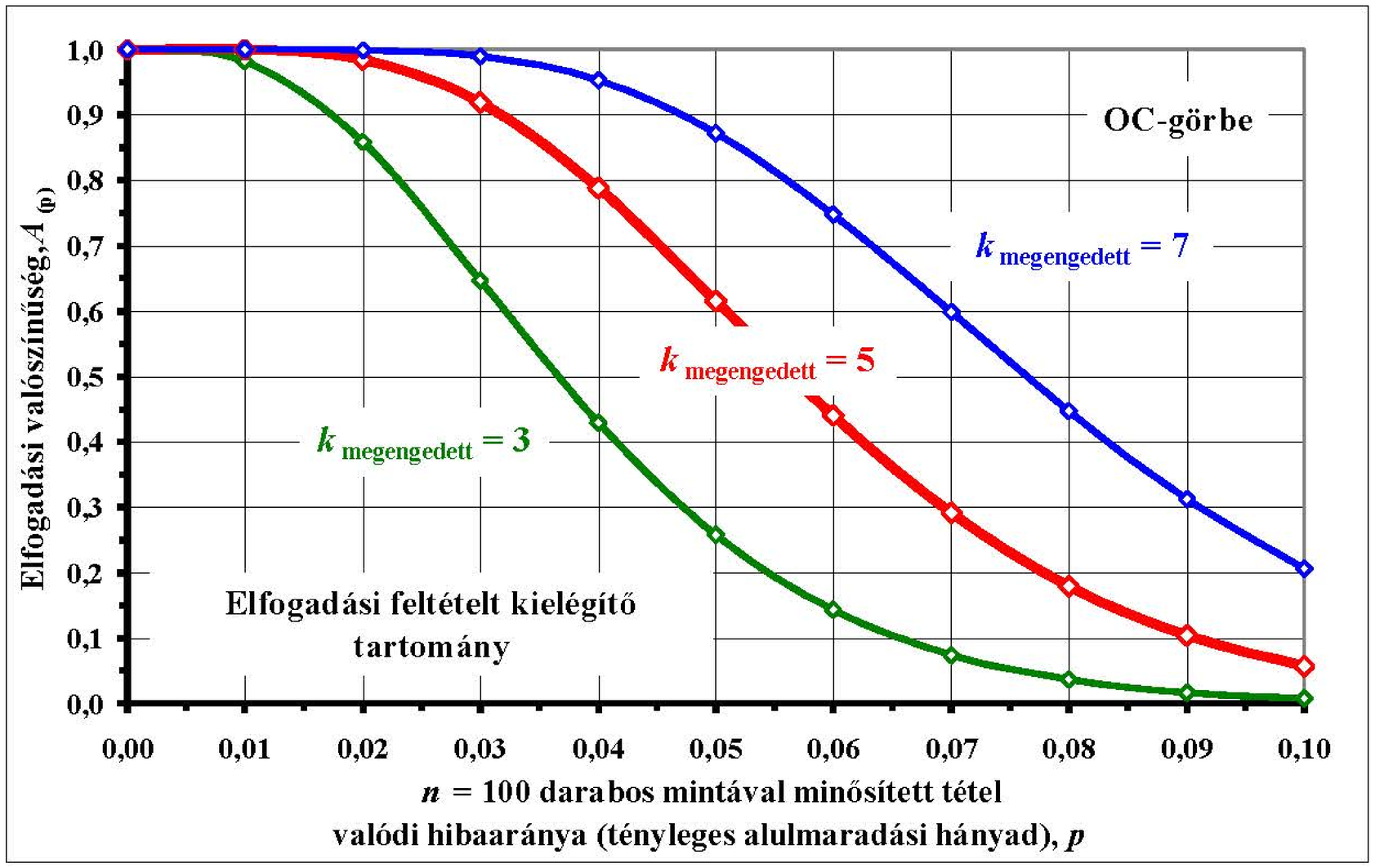
[1] Érdekességként megjegyezzük, hogy az 1970-es évek közepén-végén úgy tervezték, hogy a beton nyomószilárdságának jellemző értékét (küszöbszilárdságát) 2,275 %-os valószínűségi szint (alulmaradási hányad) figyelembevételével fogják meghatározni, amelyhez a *Gauss*-féle normális eloszlás estén $2 \times \sigma$ alulmaradási tágasság tartozik (*Bölcskei E. – Dulácska E.* 1974, *Palotás L.* 1979). Az elképzelés nem valósult meg, ugyanis az MSZ 4720-2:1980 szabványban az 5 %-os alulmaradási hányad képezte a jellemző érték számításának alapját. (Az MSZ 4720-2:1980 szabványt megelőző MSZ 4720:1961 és az abban hivatkozott MSZ 4715:1961 szabvány sem alkalmazta a 2,275 %-os valószínűségi szinten történő számítást.)



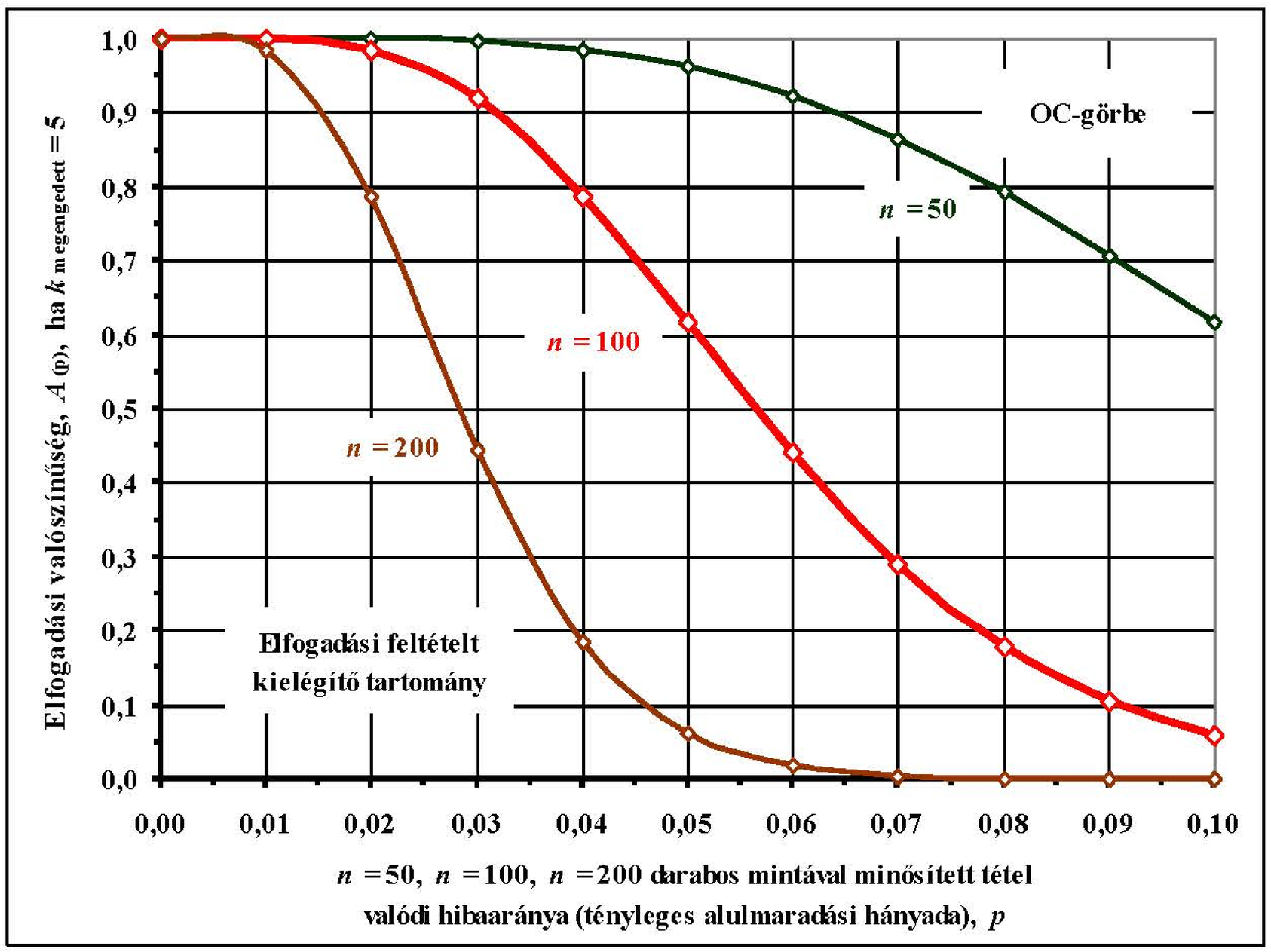
1. ábra: Binomiális valószínűségeloszlás gyakoriságfüggvénye, ha a mintavételek száma $n = 100$



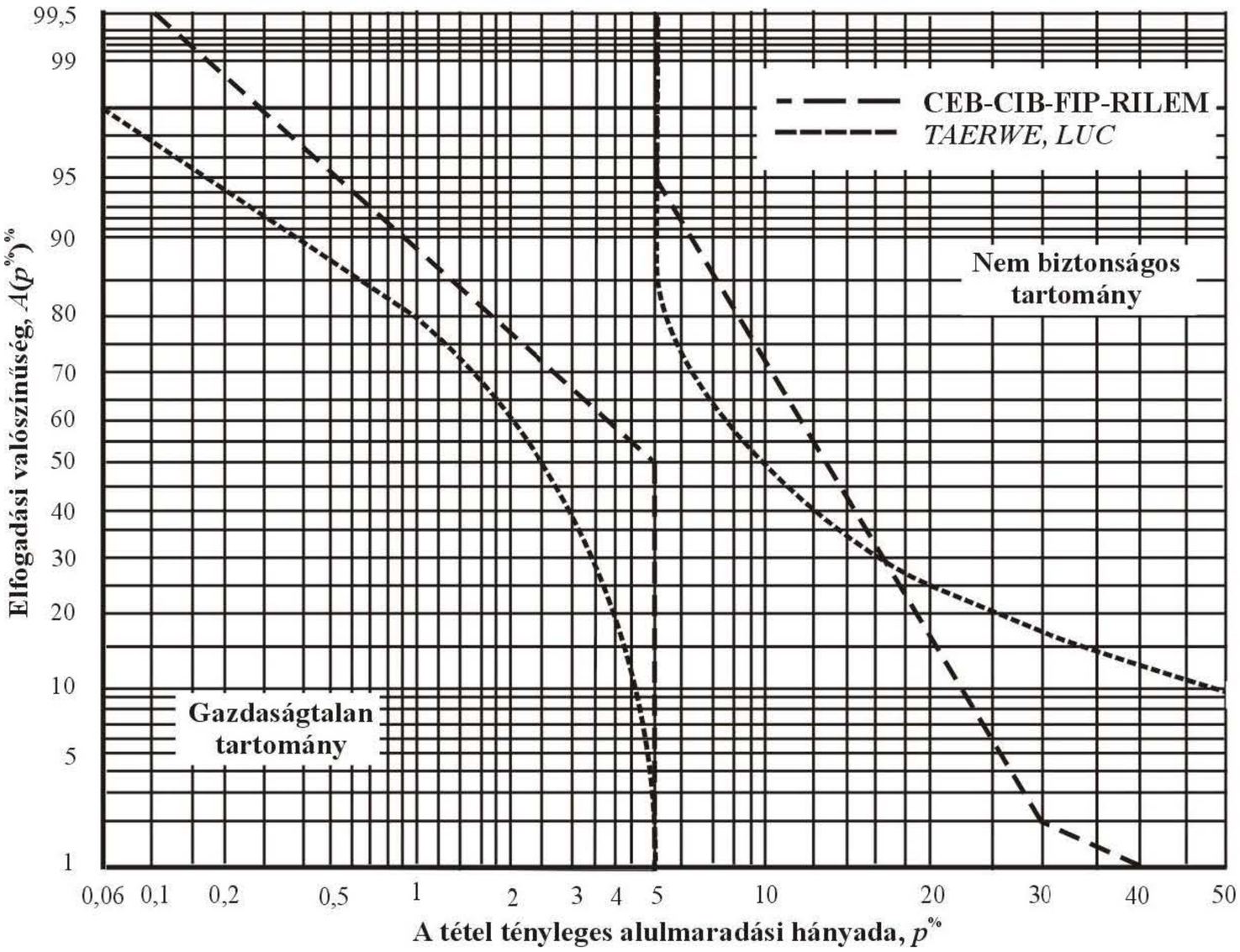
2. ábra: Binomiális valószínűségeloszlás eloszlásfüggvénye, ha a mintavételek száma $n = 100$



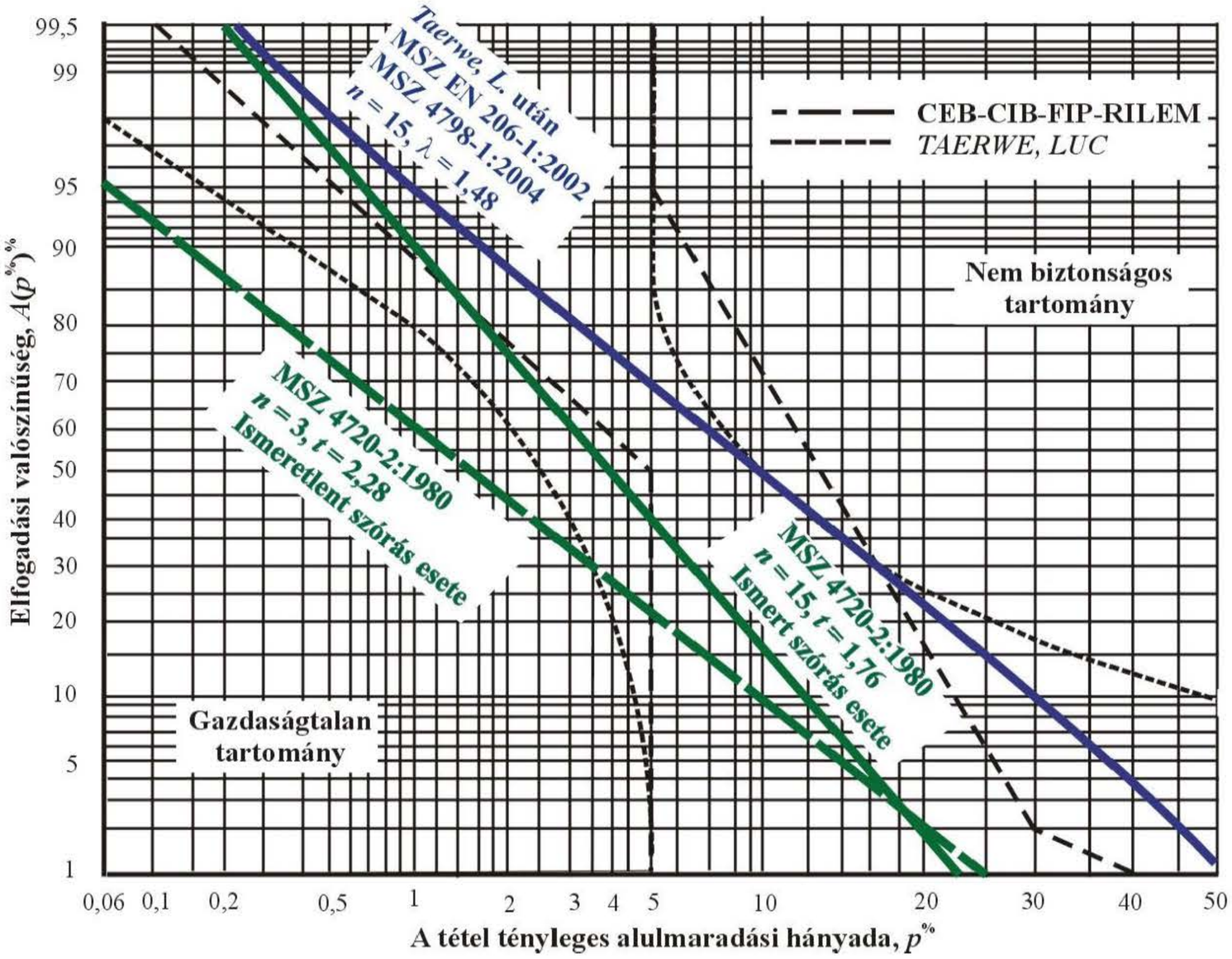
3. ábra: Elfogadási valószínűségi görbe binomiális eloszlás feltételezésével, ha a mintavételek száma $n = 100$ és a megengedett nem megfelelő minták száma $k_{megengedett} = 3$, $k_{megengedett} = 5$ és $k_{megengedett} = 7$



4. ábra: Elfogadási valószínűségi görbe binomiális eloszlás feltételezésével, ha a mintavételek száma $n = 50$, $n = 100$ és $n = 200$, és a megengedett nem megfelelő minták száma $k_{megengedett} = 5$



5. ábra: Az OC-görbék határvonalai a CEB-CIB-FIP-RILEM ajánlás szerint (MSZ 4720-2:1980) és azok *Taerwe, L.* által módosított változatai (MSZ EN 206-1:2002 és MSZ 4798-1:2004). Forrás: *Taerwe, L.* 1986



6. ábra: *Taerwe, L.* elfogadási feltételének OC-görbéje a vizsgálati eredmények közötti gyenge összefüggés esetén (forrás: *Taerwe, L.* 1986) összehasonlítva a visszavont MSZ 4720-2:1980 szabvány ismeretlen és ismert szóráson alapuló elfogadási feltételének OC-görbéjével (forrás: MÉASZ ME-04.19:1995)

Felhasznált szabványok és irodalom

MSZ 339:2008.10.06. szabványjavaslat. Betonacélok. Melegen hengerelt betonacél, hidegen alakított betonacélhuzal, gépi hegesztéssel készített síkhálók és térbeli rácos tartók. Követelmények

MSZ 4715:1961 Megszilárdult beton vizsgálata

MSZ 4720:1961 A betonok minőségi követelményei és minősítésük

MSZ 4720-2:1980 A beton minőségének ellenőrzése. 2. rész: Általános tulajdonságok ellenőrzése

MSZ 4798-1:2004 Beton. 1. rész: Műszaki feltételek, teljesítőképesség, készítés és megfelelőség. Az MSZ EN 206-1 és alkalmazási feltételei Magyarországon

MSZ EN 206-1:2002 Beton. 1. rész: Műszaki feltételek, teljesítőképesség, készítés és megfelelőség (Módosítások: MSZ EN 206-1:2000/A1:2004 és MSZ EN 206-1:2000/A2:2005)

DIN 1084-1 és -3:1988 Überwachung (Güteüberwachung) im beton- und Stahlbetonbau.
Teil 1: Beton BII auf Baustellen, Teil 3: Transportbeton

DIN 1045:1988 Beton und Stahlbeton; Bemessung und Ausführung

Bölcskei Elemér – Dulácska Endre: Statikusok könyve. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.

Fischer, Lutz: Sicherheitskonzept für neue Normen. ENV und DIN-neu. Grundlagen und Hintergrundinformationen. Teil 3: Statistische Auswertung von Stichproben im eindimensionalen Fall. Bautechnik, 76. 1999. Heft 4. pp. 328-338.

György László: Az MSZ 4720 és az MSZ ENV 206 T minősítési módszereinek az összehasonlítása. MÉÁSZ ME-04.19:1995 „Beton és vasbeton készítése" című műszaki előírás (szerkesztette és írta Ujhelyi János), 6. fejezet: „Vizsgálat, minőség-ellenőrzés, minőségtanúsítás" 6.3.4.4.4. szakasza, Budapest, 1995.

International System of Unified Standard Codes of Practice for Structures, Vol. II, CEB-FIP Model Code for Concrete Structures, CEB-FIP, 1978.

Kausay Tibor: A szemcsealak minősítéses vizsgálatának mintaelemszáma. Mélyépítéstudományi Szemle. XX. évfolyam. 1970. 8. szám, pp. 373-388.

Kausay Tibor: A beton nyomószilárdságának elfogadása. Vasbetonépítés. VIII. évfolyam, 2006. 2. szám, pp. 35-44.

Kausay Tibor: Alulmaradási tényező. Fogalom-tár. Beton szakmai havilap. XV. Évfolyam, 2007. 1. szám, pp. 3-5.

Palotás László: Mérnöki szerkezetek anyagtana 1. kötet. Általános anyagismeret. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979.

Taerwe, Luc: A General Basis for the Selection of Compliance Criteria (A megfelelőségi feltételek kiválasztásának általános alapja). IABSE Proceedings P-102/86. IABSE Periodica 3/1986 August.

Vincze Endre: Műszaki matematika. V. kötet. Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

Vincze István (szerkesztette): Statisztikai minőség-ellenőrzés. Az ipari minőségellenőrzés matematikai statisztikai módszerei. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1958.

Windisch Andor: Valószínűségelméleti és matematikai statisztikai alapismeretek. Szalai Kálmán „A beton minőségellenőrzése" című könyvének 3. fejezete. Szabványkiadó, Budapest, 1982.

Windisch Andor: A beton minőségének ellenőrzése. Balázs György „Építőanyag praktikum" című könyvének 4.6.2. fejezete. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983.

Zäschke, Wolfgang: Konformitätskriterien für die Druckfestigkeit von Beton. Betonwerk + Fertigteil-Technik, 60. Jg. 1994. Heft 9. pp. 94-100.

Vissza a

Noteszlapok abc-ben ***Noteszlapok tárgykörönként***

tartalomjegyzékhez

Lásd még az elektronikus *Betonos[e]könyv* lapjait:
http://www.betonos-e-konyv.hu/book.php?pdf=betekon-101-6-2.pdf&fb3d-page=1

A betonnyomószilárdság szórása alsó korlátjának és alulmaradási tágassága felső korlátjának hatása a nyomószilárdság matematikai statisztikai értékelési rendjének működésére

GONDOLATOK ÉS ÁBRÁK AZ MSZ EN 206:2014 ÉS MSZ 4798:2015 BETONSZABVÁNY ÉRTELMEZÉSÉHEZ

Budapest, 2014. december

Dr. Kausay Tibor

A beton nyomószilárdságának matematikai statisztikai értékelési rendje adott *n* mintaelemszám (például próbakockák száma) mellett akkor működőképes, ha a szórás (*s*) – alulmaradási tágasság (*Taerwe*-eloszlás esetén: $\lambda_n \times s$, illetve *Student*-eloszlás esetén: $t_n \times s$) koordinátarendszerében az $y_{Taerwe} = \lambda_n \times s$, illetve $y_{Student} = t_n \times s$ egyenes metszi a P[s_{min}, 0], P[s_{min}, $(\lambda_n \times s)_{max}$, illetve $(t_n \times s)_{max}$], P[$s_{max,test}$, 0], P[$s_{max,test}$, $(\lambda_n \times s)_{max}$, illetve $(t_n \times s)_{max}$] pontokkal határolt térnegyedet,

ahol:

s_{min} **a nyomószilárdság jellemző (karekterisztikus) értékének meghatározása során számításba vehető legkisebb szórás, N/mm²;**

$s_{max,test}$ **a felvett koordinátarendszerben megjeleníthető tapasztalati szórások legnagyobbika, azaz az abszcissza-tengely végpontja, ábráinkon $s_{max,test} = 7$ N/mm²;**

λ_n ***Taerwe*-féle (alulmaradási) tényező;**

t_n ***Student*-féle (alulmaradási) tényező;**

$(\lambda_n \times s)_{max}$, **illetve** $(t_n \times s)_{max}$ **a nyomószilárdság jellemző (karekterisztikus) értékének** ($f_{ck} \le f_{ck,test}$) **meghatározása során**

- **alkalmazandó konstans alulmaradási tágasság (ábráinkon az abszcissza-tengellyel párhuzamos vonal), N/mm², például:** $f_{ck} \le f_{ck,test} = f_{cm,test} - 6$
- **vagy a számításba vehető legnagyobb alulmaradási tágasság (ábráinkon az abszcissza-tengellyel párhuzamos vonal alatti terület), N/mm², például:** $f_{ck} \le f_{ck,test} = f_{cm,test} - \lambda_n \times s$ **és** $(\lambda_n \times s)_{max} = 6$, **amely utóbbi az** $f_{cm,test} - \lambda_n \times s$ **összefüggés érvényét korlátozza (ábráinkon az abszcissza-tengellyel párhuzamos vonal feletti területen);**

$f_{cm,test}$ **a nyomószilárdság tapasztalati (mért) átlagértéke, N/mm²**

Alulmaradási tényezők táblázata

Mintaszám *n*	Szabadságfok a *Student*-féle eloszlás esetén *n* - 1	*Student*-tényező t_n	*Taerwe*-tényező λ_n
	(*Stange* et al., 1966)		(*Taerwe*, 1986)
2	1	6,314	
3	2	2,920	2,67
4	3	2,353	2,20
5	4	2,132	1,99
6	5	2,015	1,87
7	6	1,943	1,77
8	7	1,895	1,72
9	8	1,860	1,67
10	9	1,833	1,62
11	10	1,812	1,58
12	11	1,796	1,55
13	12	1,782	1,52
14	13	1,771	1,50
15	14	1,761	*1,48*
20	19	1,729	
30	29	1,699	
	∞	*1,645*	

Megjegyzés az alulmaradási tényezők táblázatához

Az előző diakocka a táblázatában szereplő *Student*-tényező értékek *Stange – Henning* (1966) matematikai statisztikai könyvéből származnak. Ugyanezek az értékek találhatók *Mohr* (2008) mérnököknek és természettudósoknak szánt matematikai statisztikai könyvében.

Ezektől *a Student*-tényező értékektől bizonyos mértékig eltérnek a visszavont MSZ 4720-2:1980 szabványban szereplő *Student*-tényező értékek, mert azokat annak idején *Palotás* professzor az *Owen* könyvében szereplő, *Wald-* és *Wolfowitz*-féle adatokból határozta meg. (*Owen* 1962; *Palotás*: Mérnöki szerkezetek anyagtana I. kötet III. fejezet 9.93.4. szakasz, p. 645 (1979); *Szalai* 1982: 2.8.5. szakasz).

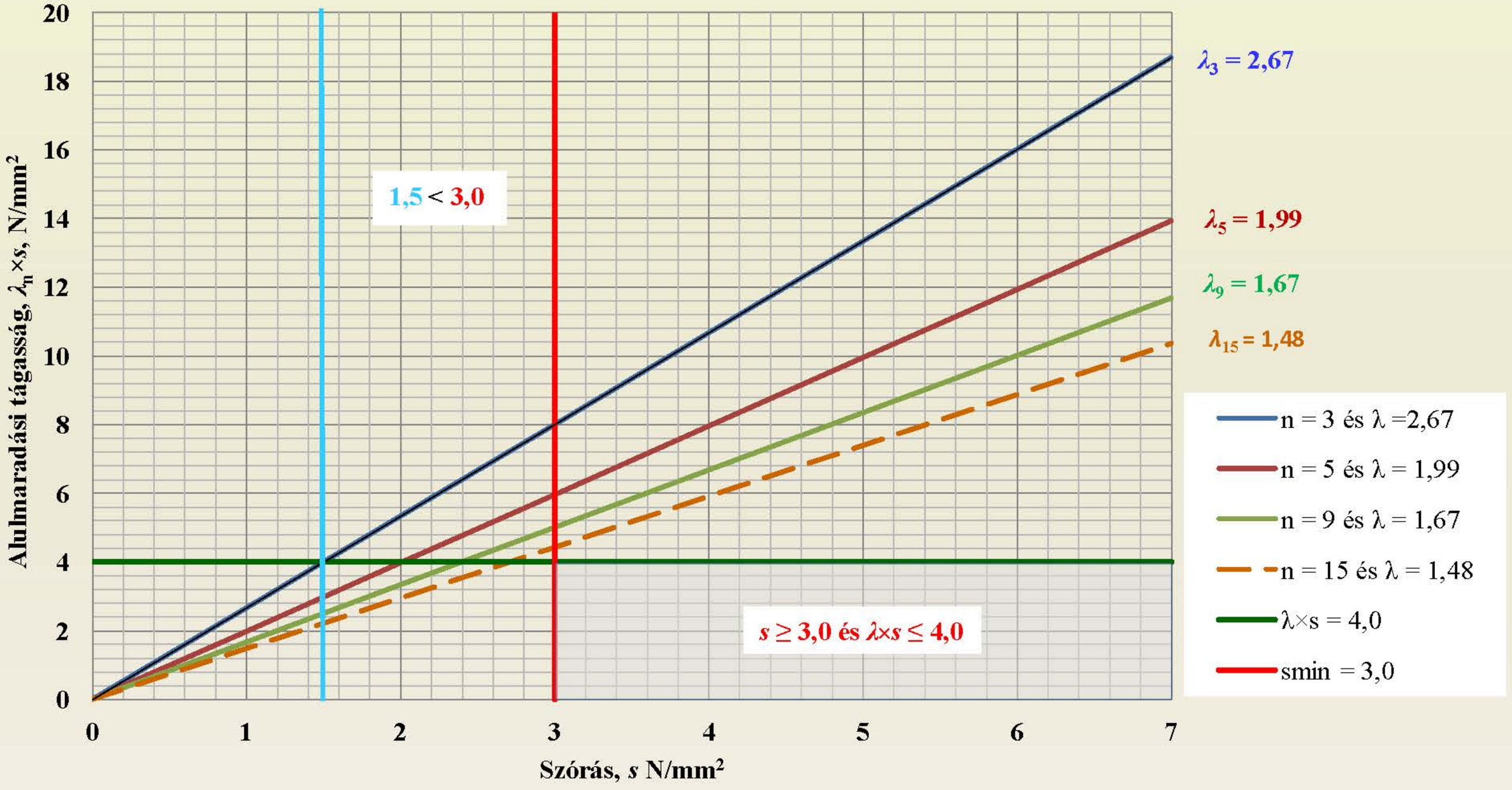
Az előző diakockán közölt táblázatban szereplő *Student*-tényezők valamelyest eltérnek az MSZ EN 1990:2011 Eurocode szabvány D1. táblázatában található *Student*-tényezőktől is:

Próbatestek száma, *n*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**∞**
„*V* ismert”	**2,31**	**2,01**	**1,89**	**1,83**	**1,80**	**1,77**	**1,74**	**1,72**	**1,68**	**1,67**	**1,64**
„*V* ismeretlen”			**3,37**	**2,63**	**2,33**	**2,18**	**2,00**	**1,92**	**1,76**	**1,73**	**1,64**

Az MSZ EN 1990:2011 Eurocode szabvány D1. táblázatáról annyit tudunk, hogy

- **a „*V* ismert” sor adatait $(n/(n+1))^{0,5}$ tényezővel megszorozva, minden szorzat eredménye – a kerekítési eltérésektől eltekintve – 1,645, amely a *Gauss*-eloszlás 5 %-os alulmaradási hányadhoz tartozó alulmaradási tényezője;**
- **a „*V* ismeretlen” sor adatait $(n/(n+1))^{0,5}$ tényezővel megszorozva, minden szorzat eredménye – a kerekítési eltérésektől eltekintve – az *n* próbatest számhoz tartozó *Student*-tényezőt adja;**
- **ha $n \rightarrow \infty$, akkor $(n/(n+1))^{0,5} \rightarrow 1,0$.**

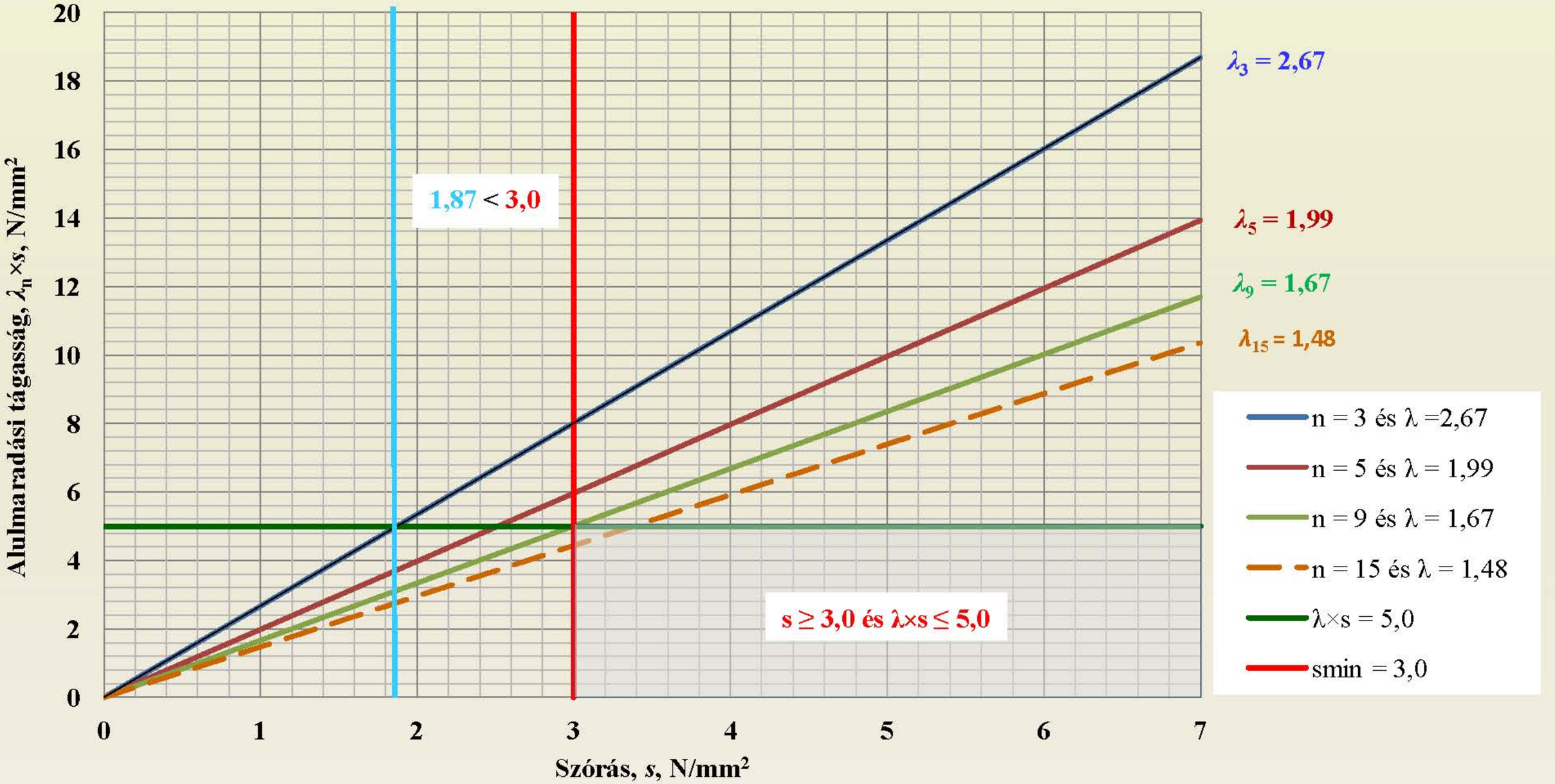
Alulmaradási tágasság *Taerwe*-eloszlás esetén, ha $\lambda_n \times s \leq 4{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $\lambda_n \times s \leq 4{,}0$ előírása esetén $n = 15$ próbatest sem lenne elegendő, mert $\lambda_{15} \times s_{min} = 1{,}48 \times 3{,}0 = 4{,}44 > 4{,}0$

$n = 3$ próbatest esetén pedig a *Taerwe*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 1{,}5$ feltétel mellett érvényesülne, mert $\lambda_3 \times s_{min} = 2{,}67 \times 1{,}498 = 4{,}0$

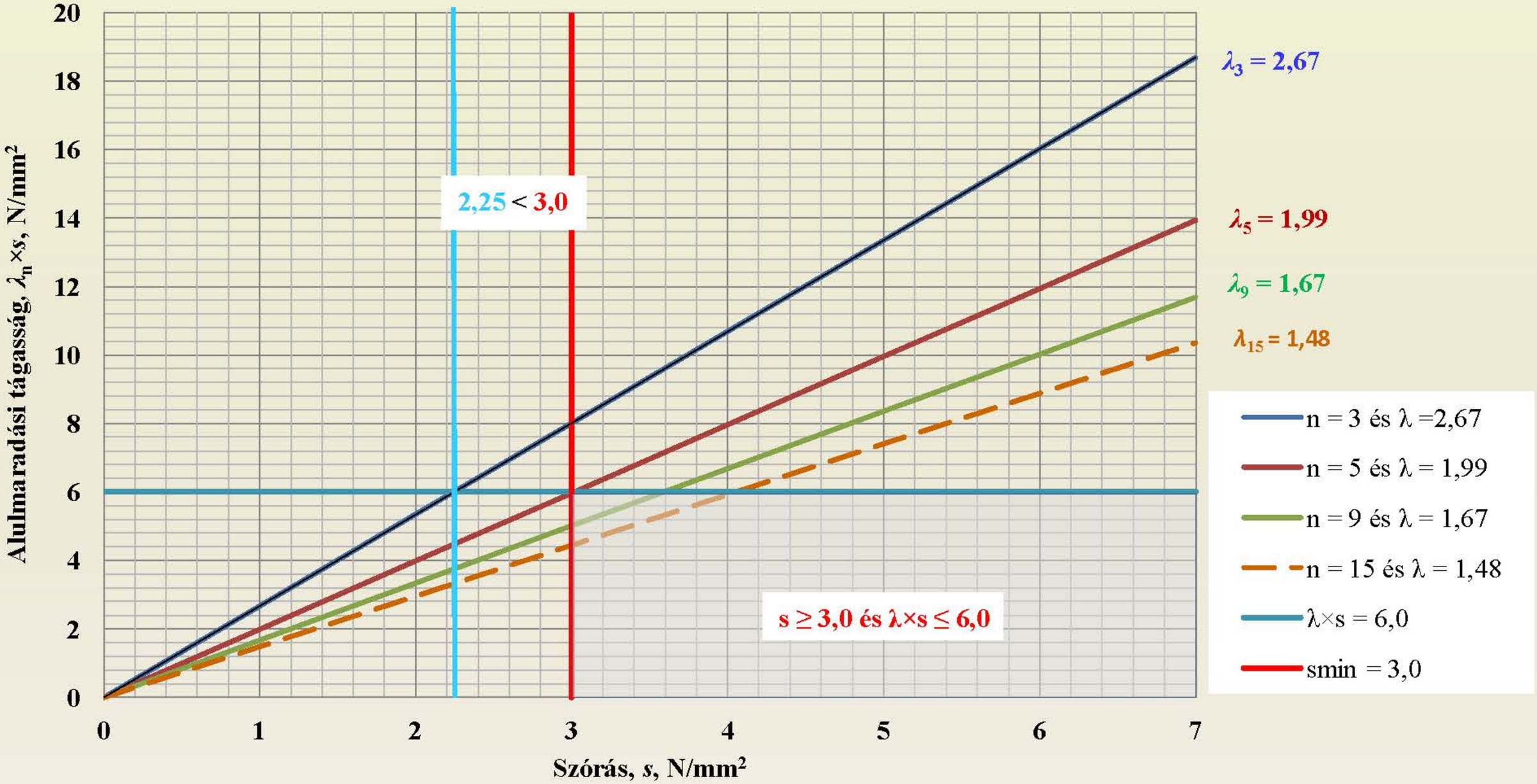
Alulmaradási tágasság *Taerwe*-eloszlás esetén, ha $\lambda_n \times s \leq 5{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $\lambda_n \times s \leq 5{,}0$ előírása esetén legalább $n = 9$ próbatest lenne szükséges, mert $\lambda_9 \times s_{min} = 1{,}67 \times 3{,}0 = 5{,}01 > 5{,}0$

$n = 3$ próbatest esetén pedig a *Taerwe*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 1{,}87$ feltétel mellett érvényesülne, mert $\lambda_3 \times s_{min} = 2{,}67 \times 1{,}87 = 4{,}99$

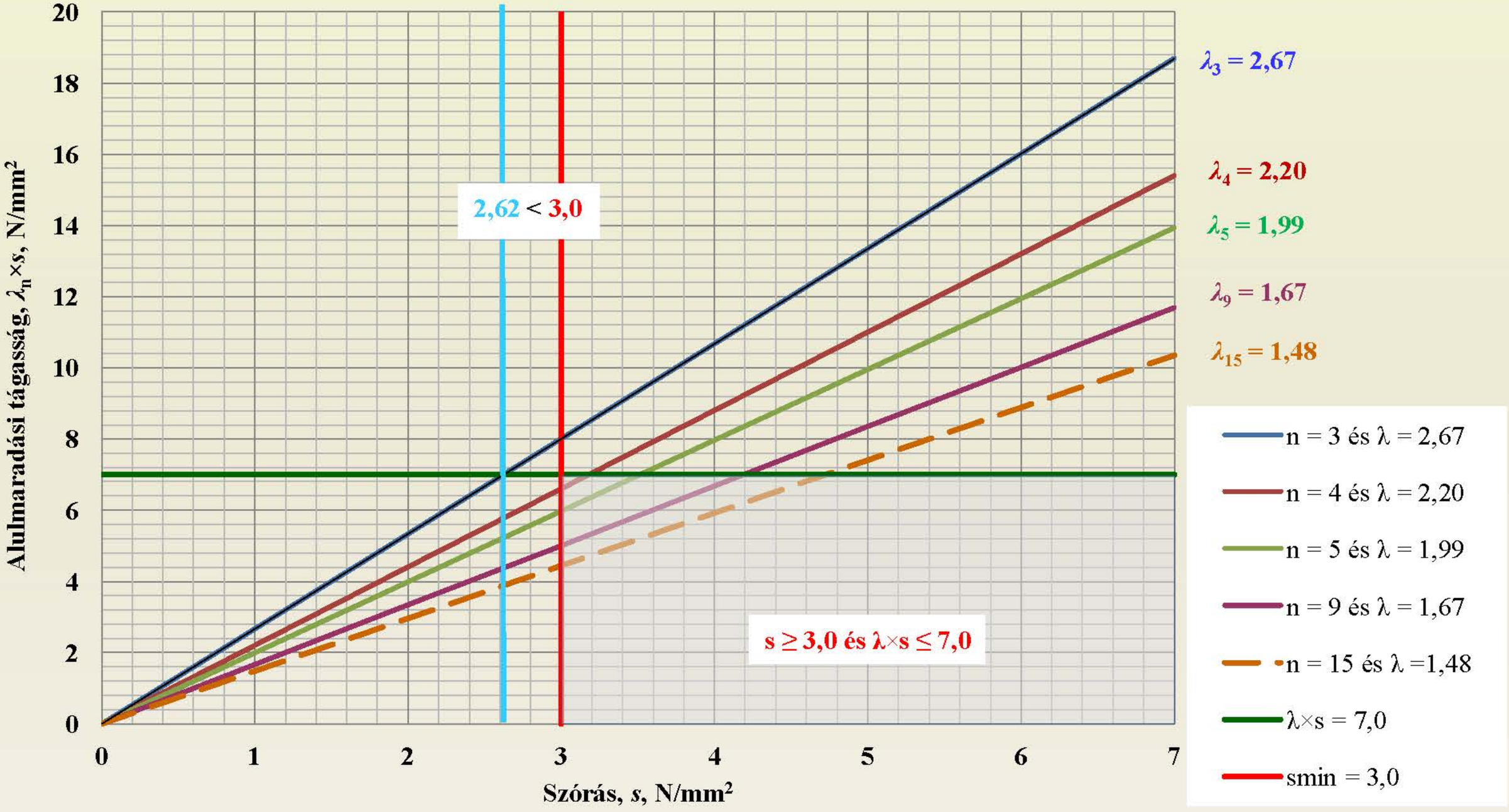
Alulmaradási tágasság *Taerwe*-eloszlás esetén, ha $\lambda_n \times s \leq 6{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $\lambda_n \times s \leq 6{,}0$ előírása esetén legalább $n = 5$ próbatest lenne szükséges, mert $\lambda_5 \times s_{min} = 1{,}99 \times 3{,}0 = 5{,}97 \sim 6{,}0$

$n = 3$ próbatest esetén pedig a *Taerwe*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 2{,}25$ feltétel mellett érvényesülne, mert $\lambda_3 \times s_{min} = 2{,}67 \times 2{,}25 = 6{,}01$

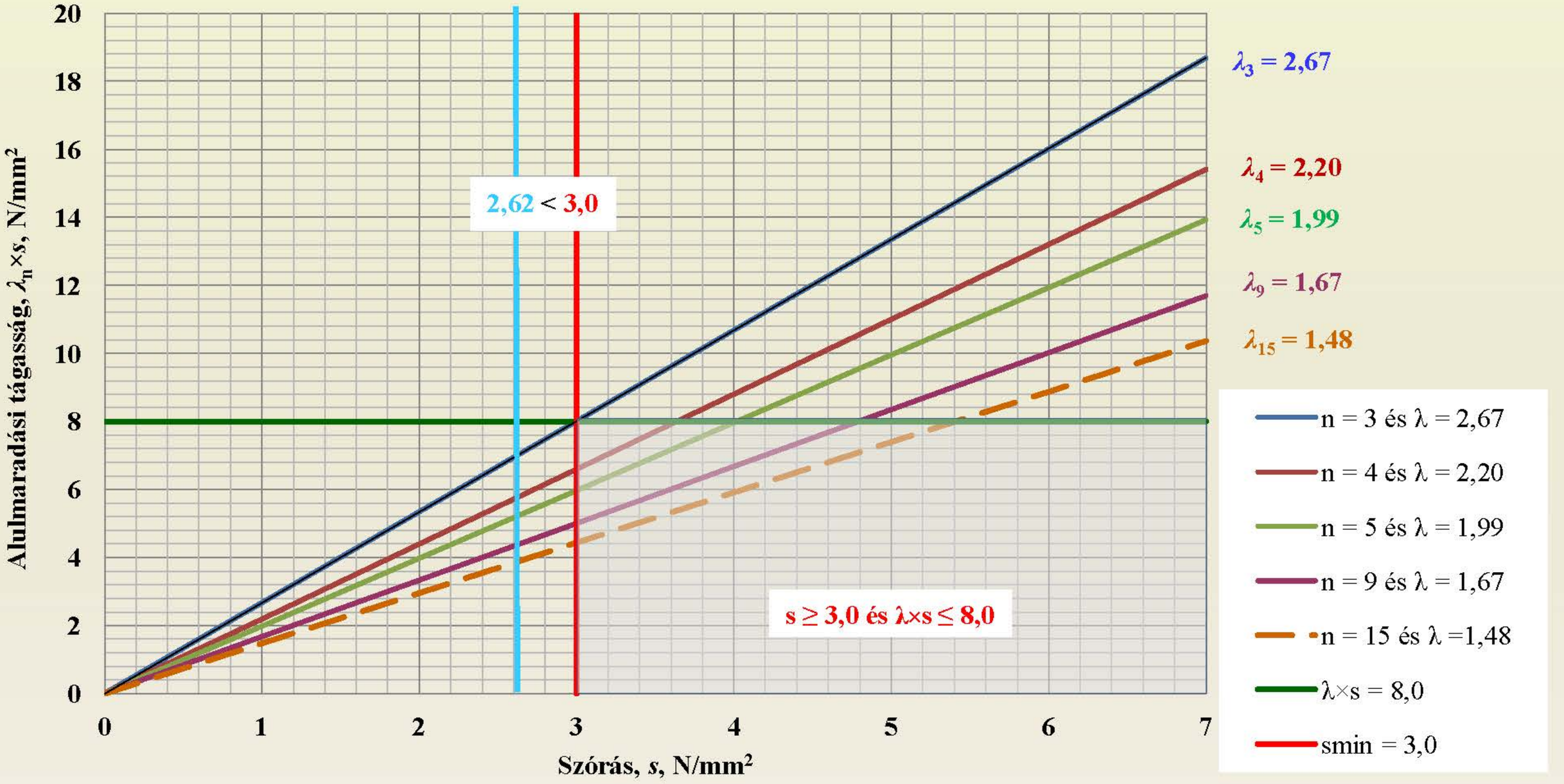
Alulmaradási tágasság *Taerwe*-eloszlás esetén, ha $\lambda_n \times s \leq 7{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $\lambda_n \times s \leq 7{,}0$ előírása esetén legalább $n = 4$ próbatest lenne szükséges, mert $\lambda_4 \times s_{min} = 2{,}20 \times 3{,}0 = 6{,}6 < 7{,}0$

$n = 3$ próbatest esetén pedig a *Taerwe*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 2{,}62$ feltétel mellett érvényesülne, mert $\lambda_3 \times s_{min} = 2{,}67 \times 2{,}62 = 7{,}0$

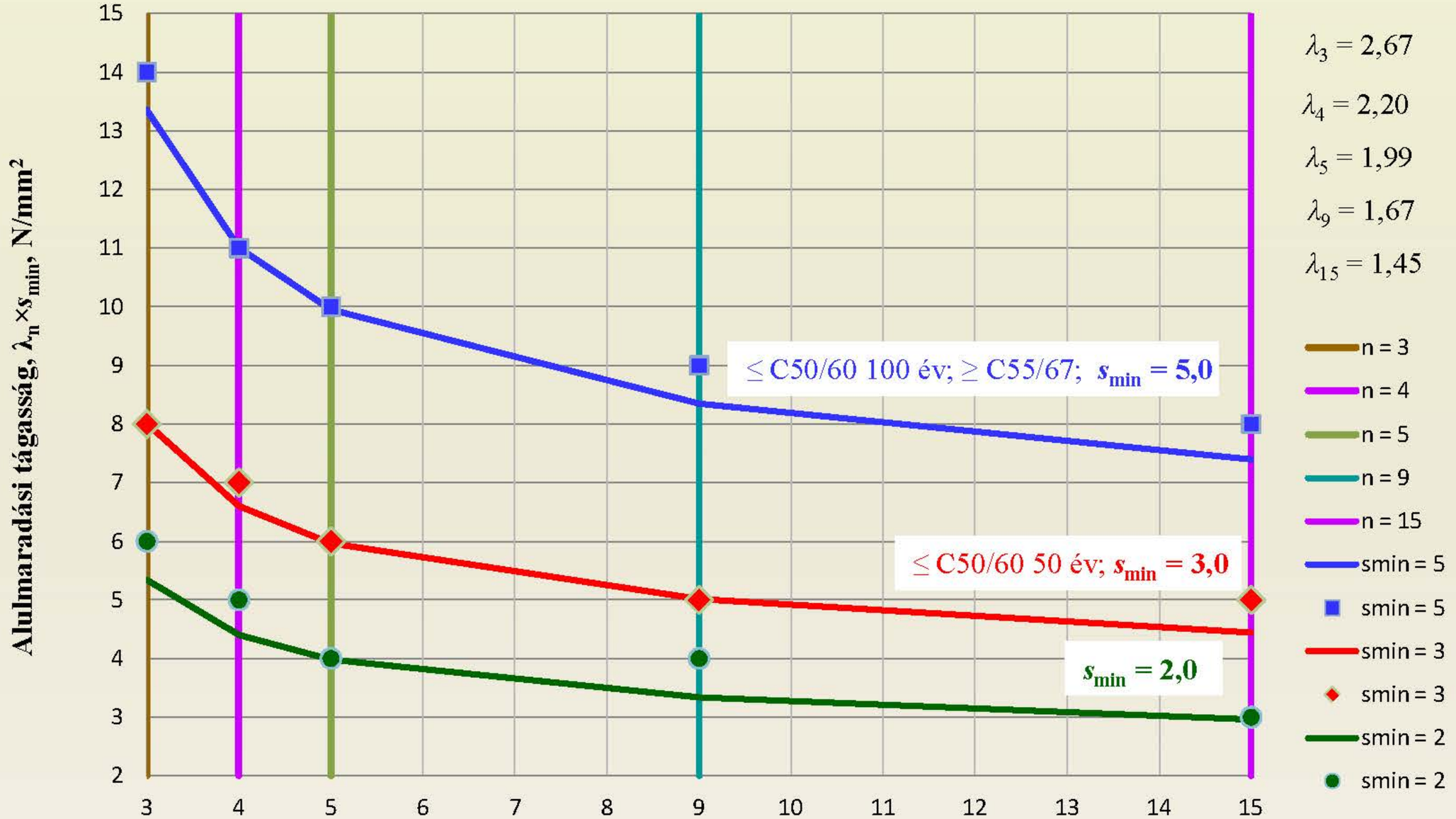
Alulmaradási tágasság *Taerwe*-eloszlás esetén, ha $\lambda_n \times s \leq 8{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $\lambda_n \times s \leq 8{,}0$ előírása esetén legalább $n = 3$ próbatest szükséges, mert $\lambda_3 \times s_{min} = 2{,}67 \times 3{,}0 = 8{,}01 \sim 8{,}0$

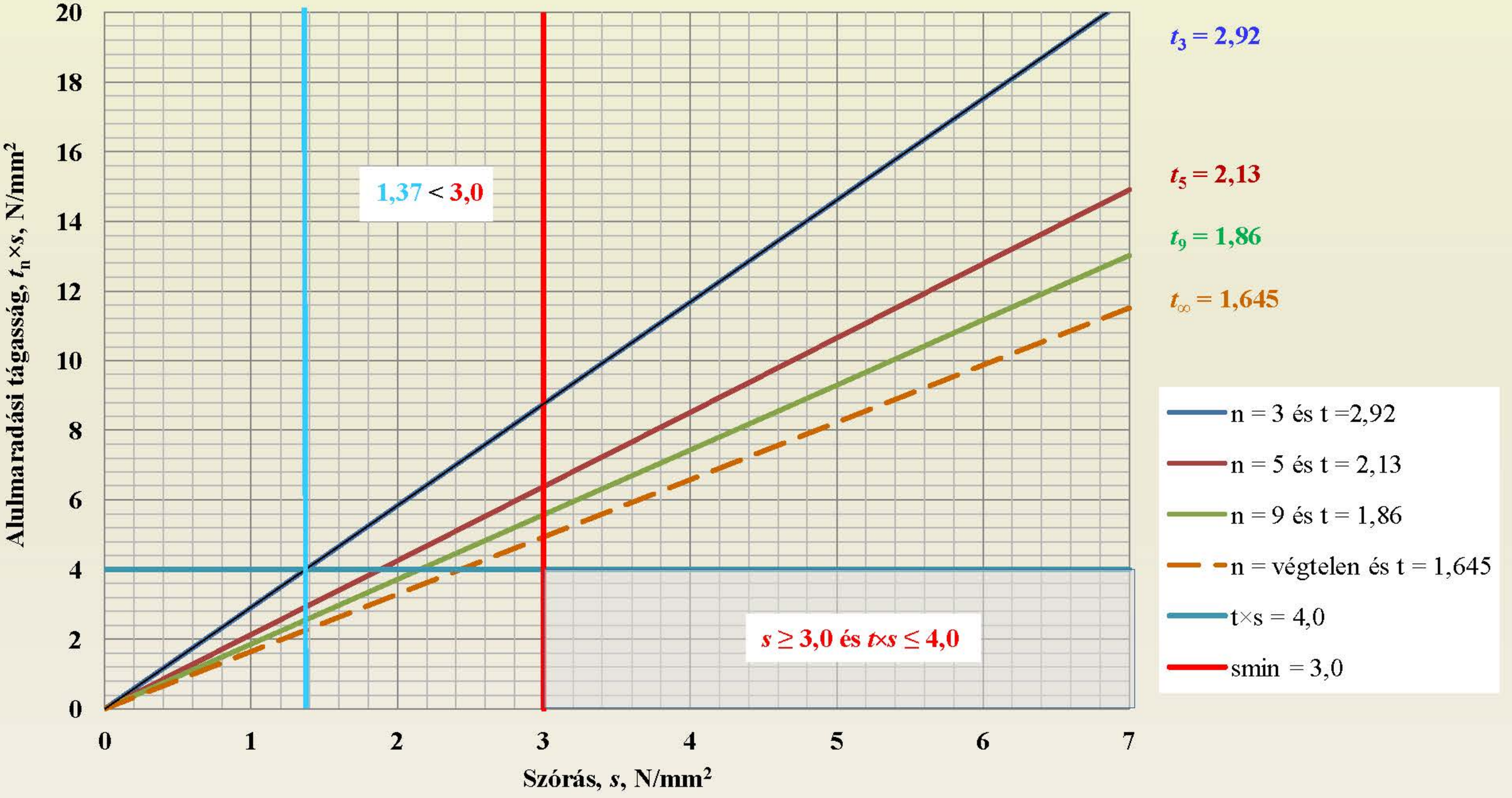
$n = 3$ próbatest esetén tehát a *Taerwe*-tényezős összefüggés $s_{min} = 3{,}0$ feltétel mellett érvényesül, mert $\lambda_3 \times s_{min} = 2{,}67 \times 3{,}0 = 8{,}01$

$\lambda_n \times s_{min}$ alulmaradási tágasság szükséges értéke az *n* darabszám függvényében, *Taerwe*-eloszlás esetén, ahhoz, hogy az s_{min} feltétel ne sérüljön



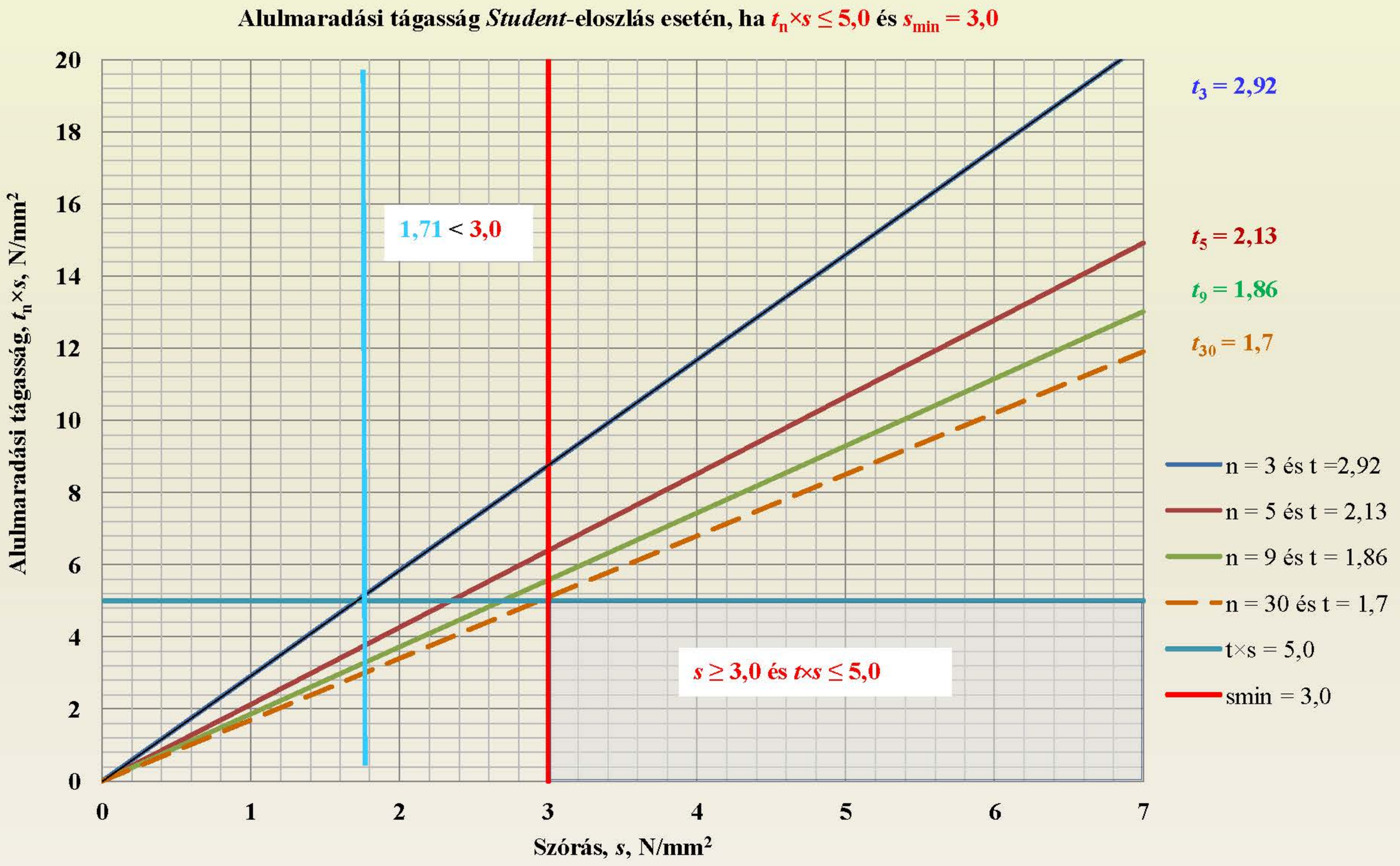
A vonalak feletti pontok a felfele kerekített egész számú szükséges $\lambda_n \times s_{min}$ értékek

Alulmaradási tágasság *Student*-eloszlás esetén, ha $t_n \times s \leq 4{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $t_n \times s \leq 4{,}0$ előírása esetén, végtelen számú próbatest sem lenne elegendő, mert $t_\infty \times s_{min} = 1{,}645 \times 3{,}0 = 4{,}935 < 4{,}0$

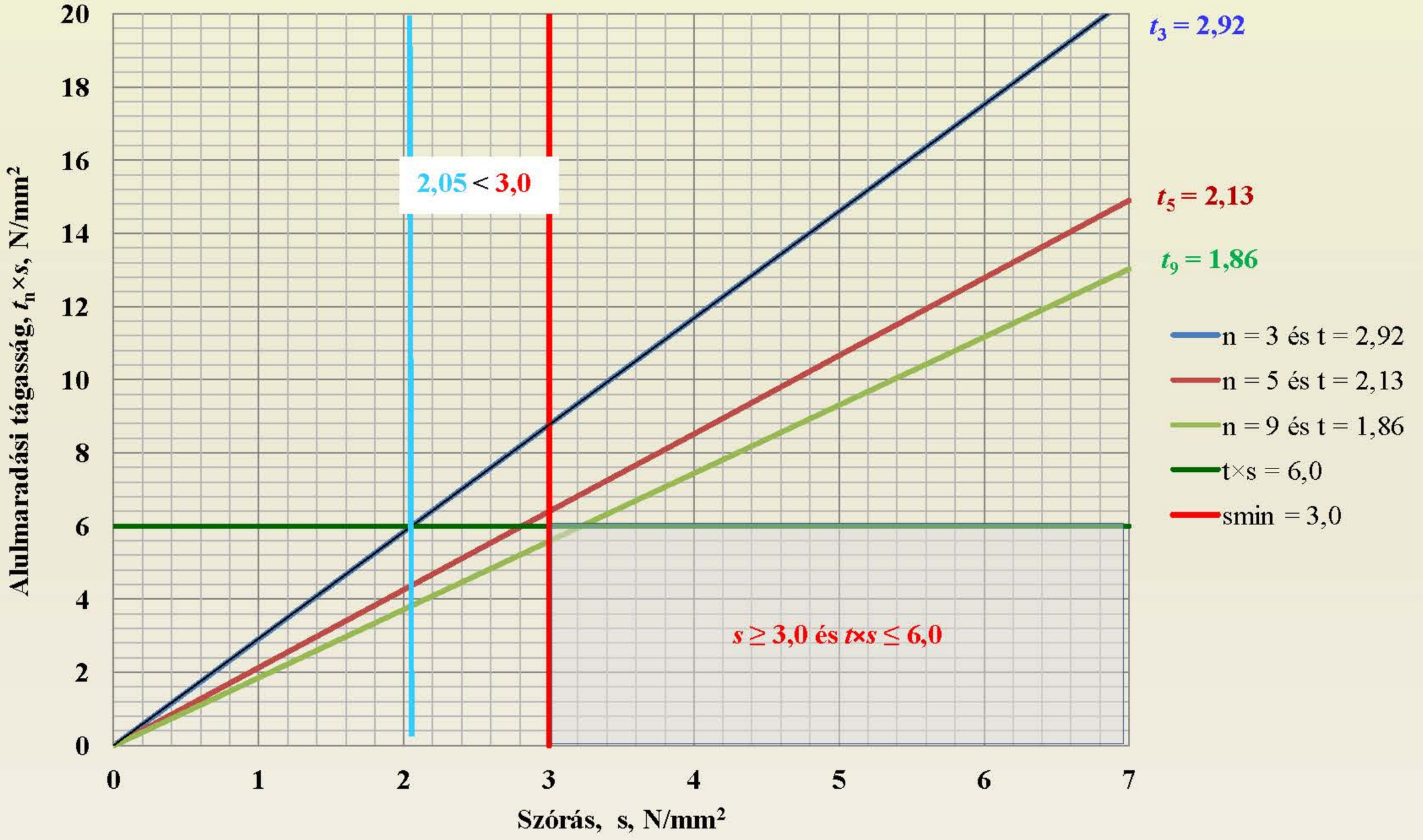
$n = 3$ próbatest esetén pedig a *Student*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 1{,}37$ feltétel mellett érvényesülne, mert $t_3 \times s_{min} = 2{,}92 \times 1{,}37 = 4{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $t_n \times s \leq 5{,}0$ előírása esetén legalább $n = 30$ próbatest lenne szükséges, mert $t_{30} \times s_{min} = 1{,}7 \times 3{,}0 = 5{,}1 < 5{,}0$

$n = 3$ próbatest esetén pedig a *Student*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 1{,}71$ feltétel mellett érvényesülne, mert $t_3 \times s_{min} = 2{,}92 \times 1{,}71 = 4{,}99 < 5{,}0$

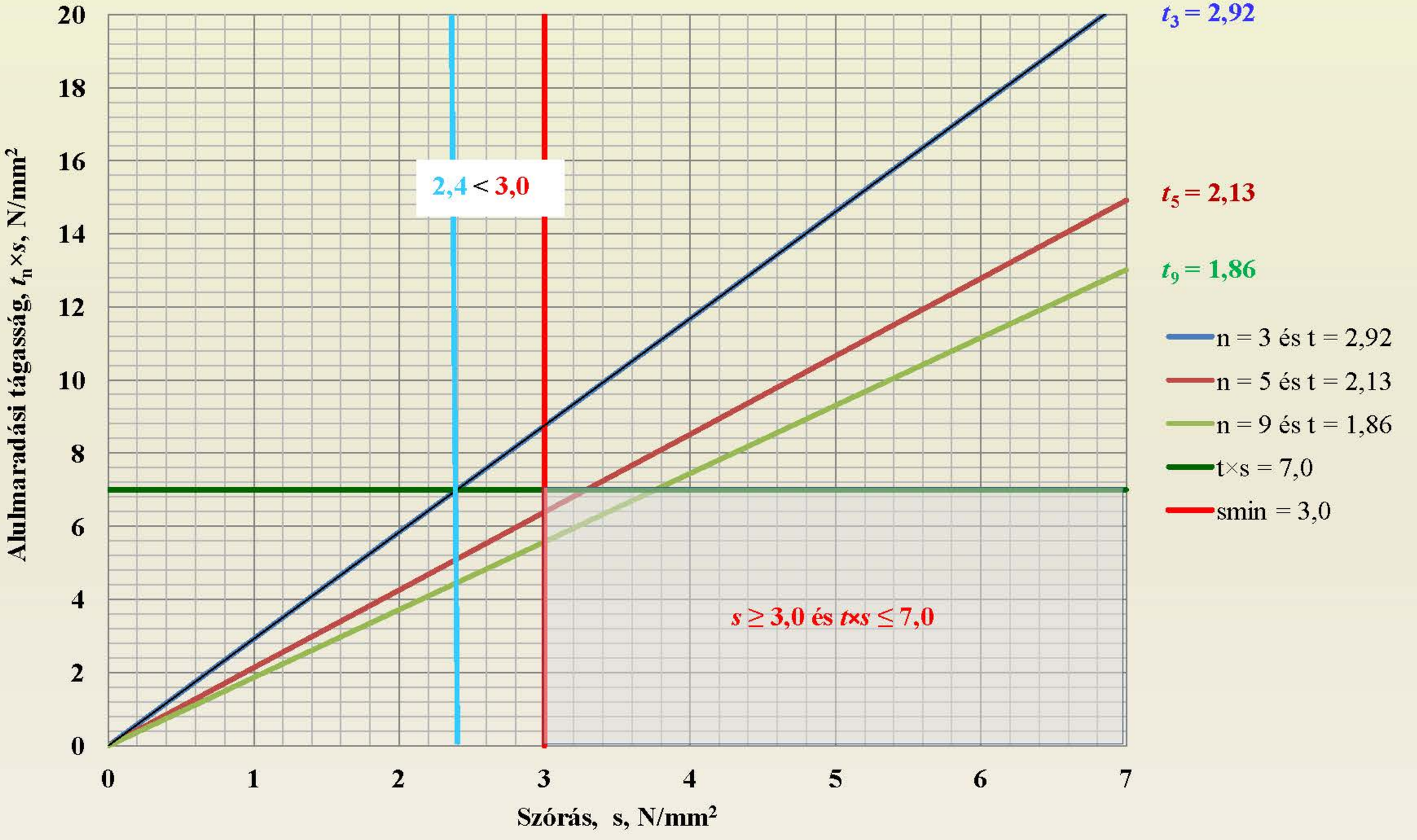
Alulmaradási tágasság *Student*-eloszlás esetén, ha $t_n \times s \leq 6{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $t_n \times s \leq 6{,}0$ előírása esetén legalább $n = 9$ próbatest szükséges, mert $t_9 \times s_{min} = 1{,}86 \times 3{,}0 = 5{,}58 < 6{,}0$

$n = 3$ próbatest esetén pedig a *Student*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 2{,}05$ feltétel mellett érvényesül, mert $t_3 \times s_{min} = 2{,}92 \times 2{,}05 = 5{,}99 < 6{,}0$

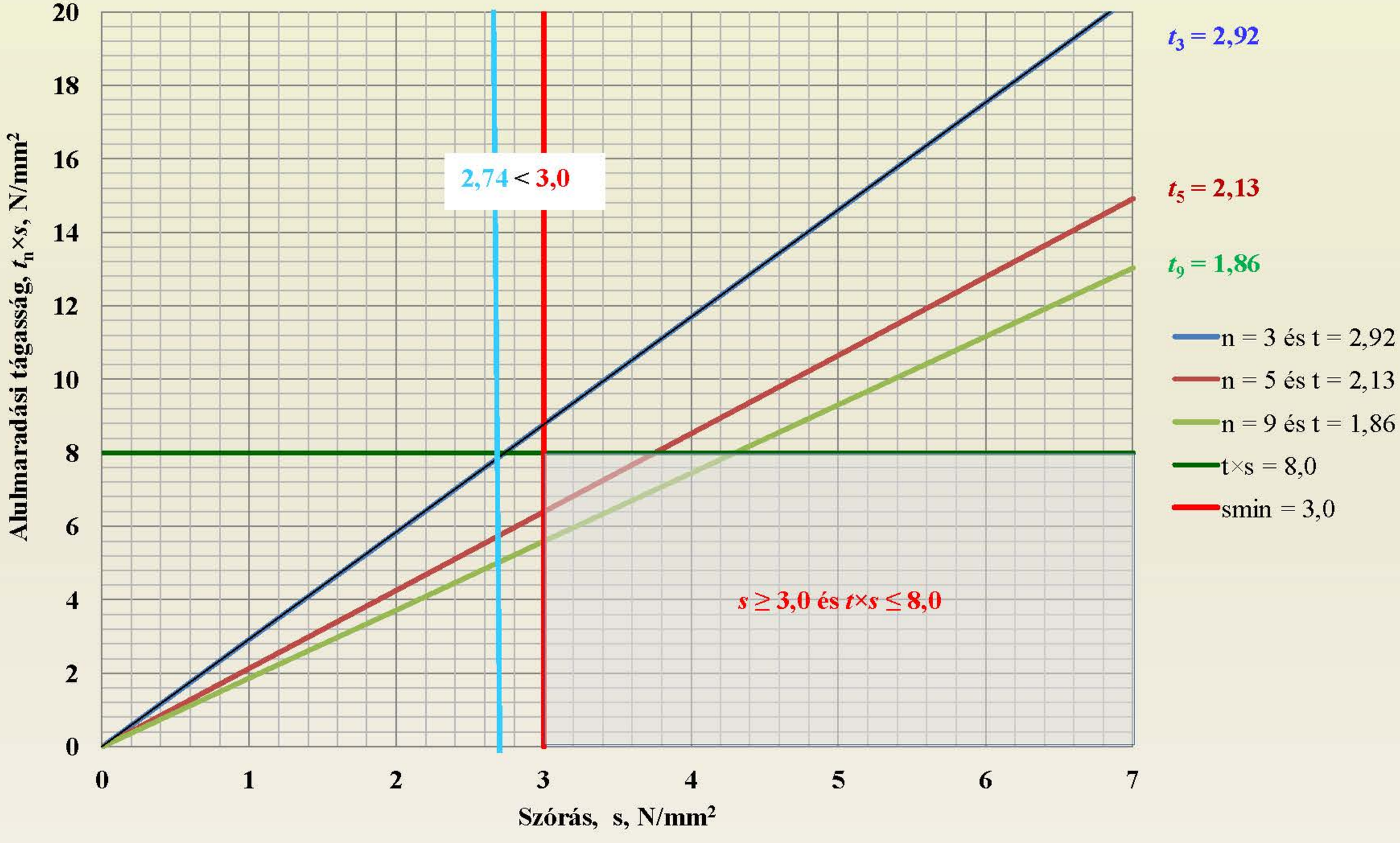
Alulmaradási tágasság *Student*-eloszlás esetén, ha $t_n \times s \leq 7{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $t_n \times s \leq 7{,}0$ előírása esetén legalább $n = 5$ próbatest szükséges, mert $t_5 \times s_{min} = 2{,}13 \times 3{,}0 = 6{,}39 < 7{,}0$

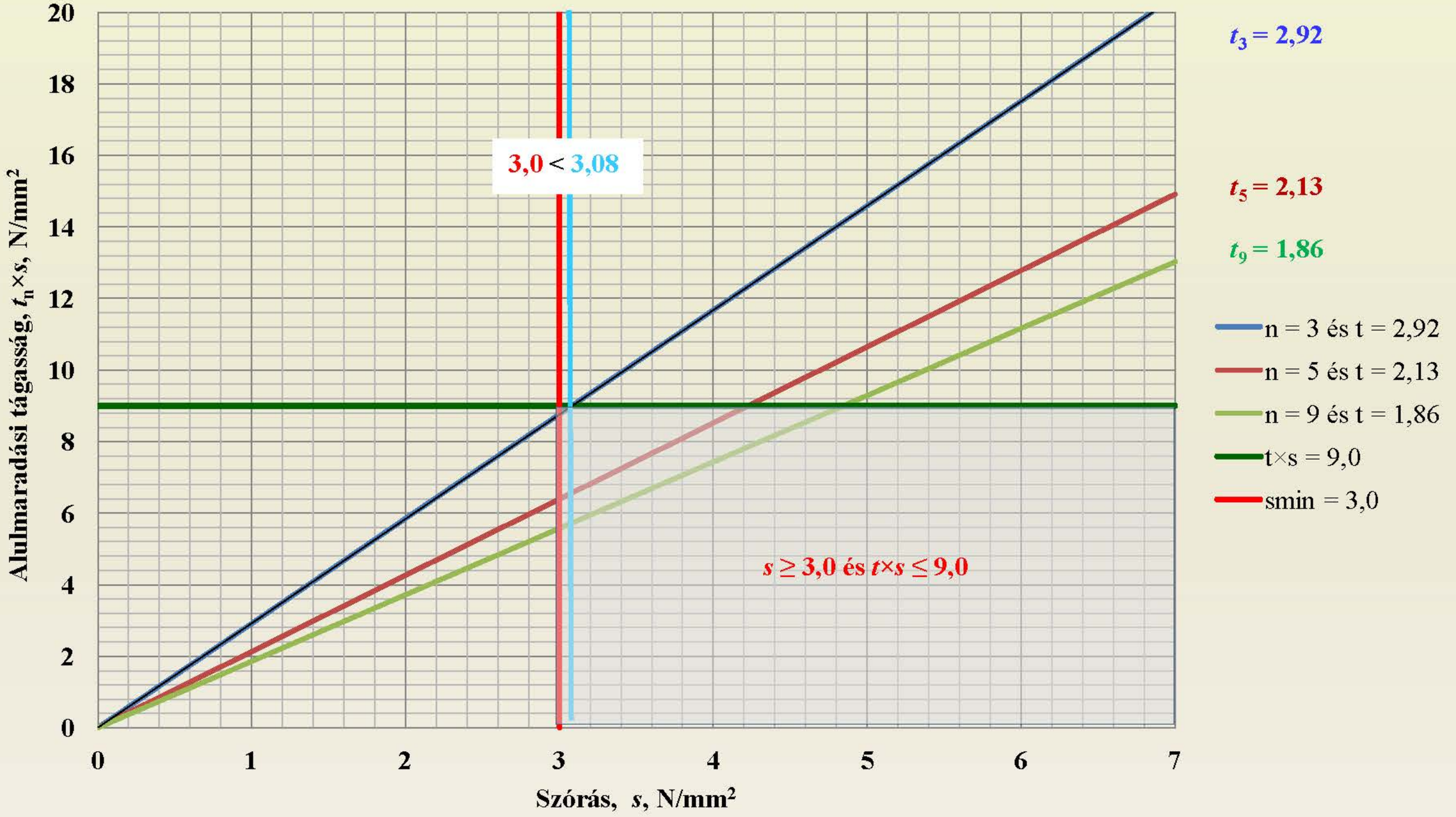
$n = 3$ próbatest esetén pedig a *Student*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 2{,}397 \sim 2{,}4$ feltétel mellett érvényesül, mert $t_3 \times s_{min} = 2{,}92 \times 2{,}397 = 7{,}0$

Alulmaradási tágasság *Student*-eloszlás esetén, ha $t_n \times s \leq 8{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $t_n \times s \leq 8{,}0$ előírása esetén legalább $n = 5$ próbatest szükséges, mert $t_5 \times s_{min} = 2{,}13 \times 3{,}0 = 6{,}39 < 8{,}0$

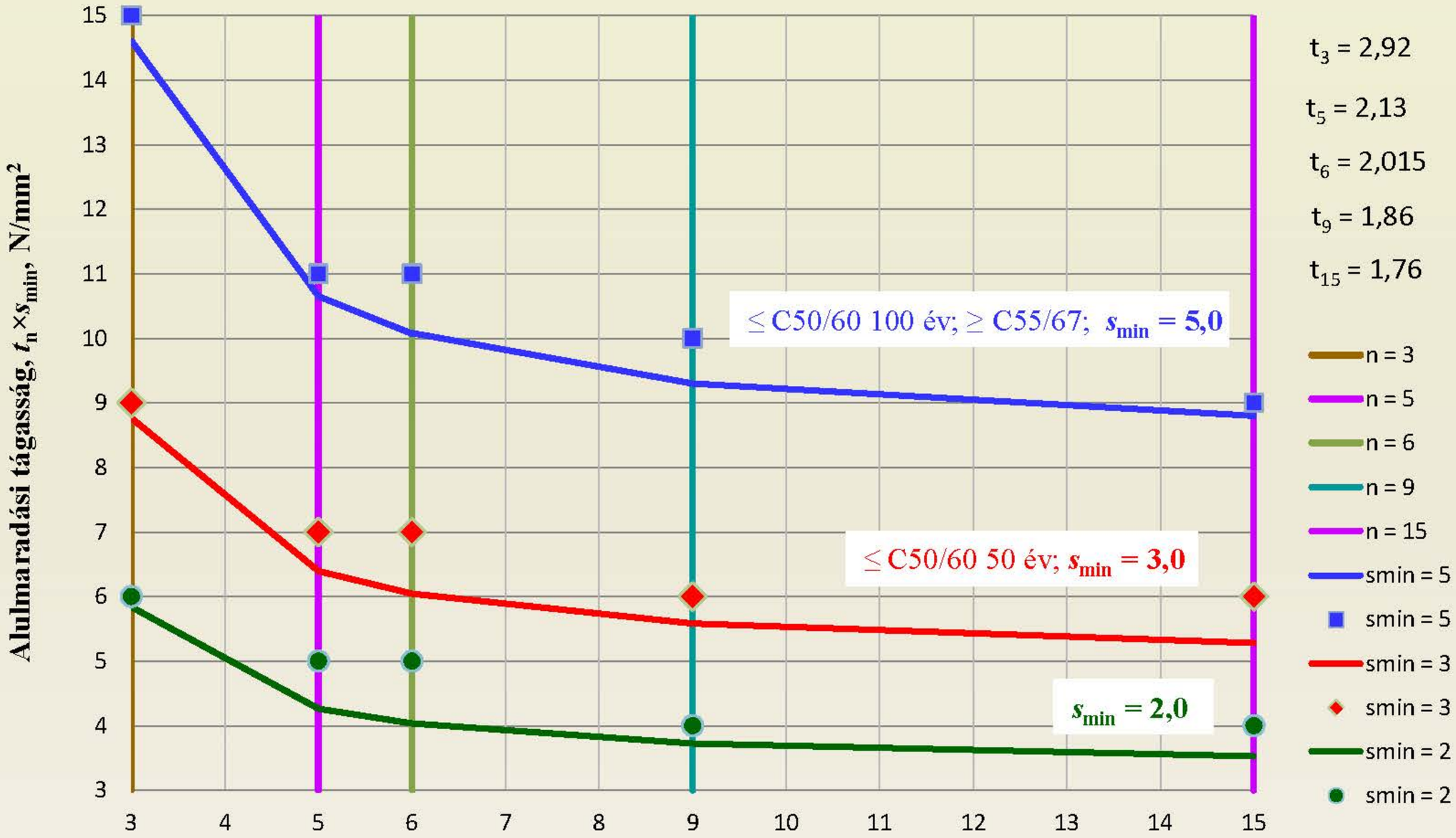
$n = 3$ próbatest esetén pedig a *Student*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 2{,}74$ feltétel mellett érvényesül, mert $t_3 \times s_{min} = 2{,}92 \times 2{,}74 = 8{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $t_n \times s \leq 9{,}0$ előírása esetén $n = 3$ próbatest elegendő, mert $t_3 \times s_{min} = 2{,}92 \times 3{,}0 = 8{,}76 < 9{,}0$

$n = 3$ próbatest esetén tehát a *Student*-tényezős összefüggés $s_{min} = 3{,}08$ feltétel mellett érvényesül, mert $t_n \times s / t_3 = 9{,}0/2{,}92 = 3{,}08 > 3{,}0$

$t_n \times s_{min}$ alulmaradási tágasság szükséges értéke az *n* darabszám függvényében, *Student*-eloszlás esetén, ahhoz, hogy az s_{min} feltétel ne sérüljön



Próbatestek száma, *n*

A vonalak feletti pontok a felfele kerekített egész számú szükséges $t_n \times s_{min}$ értékek

Alulmaradási tágasság szükséges értéke az *n* darabszám függvényében, ahhoz, hogy az s_{min} feltétel ne sérüljön

Táblázatos összefoglalás

Próbatestek száma, n	Alulmaradási tágasság szükséges értéke ***Taerwe*-eloszlás** esetén, $\lambda_n \times s_{min}$, N/mm²			Alulmaradási tágasság szükséges értéke ***Student*-eloszlás** esetén, $t_n \times s_{min}$, N/mm²		
s_{min}, N/mm²	**2,0**	**3,0**	**5,0**	**2,0**	**3,0**	**5,0**
3	5,34 → **6**	8,01 → **8**	13,35 → **14**	5,84 → **6**	8,76 → **9**	14,60 → 15
4	4,40 → **5**	6,60 → 7	11,00 → **11**	**5**	**8**	**13**
5	3,98 → **4**	5,97 → ***6***	9,95 → **10**	4,26 → **5**	6,39 → **7**	10,65 → **11**
6	**4**	**6**	**10**	4,03 → **5**	6,04 → **7**	10,08 → **11**
9	3,34 → **4**	5,01 → **5**	8,35 → **9**	3,72 → **4**	5,58 → **6**	9,30 → **10**
15	2,96 → **3**	4,44 → **5**	7,40 → **8**	3,52 → **4**	5,28 → **6**	8,80 → **9**

Hosser, D. – Gensel, D.: **Kritische Bewertung der Statistik beim Konformitätsnachweis der Betondrickfestikkeit nach prEN 206. TU Braunschweig, IBMB (Inst. F. Baustoffe, Massivbau und Brandschutz) Im Auftrag des Deutschen Beton-Verein E.V. Braunschweig, 1995.**

OC-görbe (Operating characteristic curve) szemléletesen mutatja a *Taerwe*- féle és a *Student*-féle eloszlásra épülő nyomószilárdság megfelelőség igazolási eljárás különbözőségét

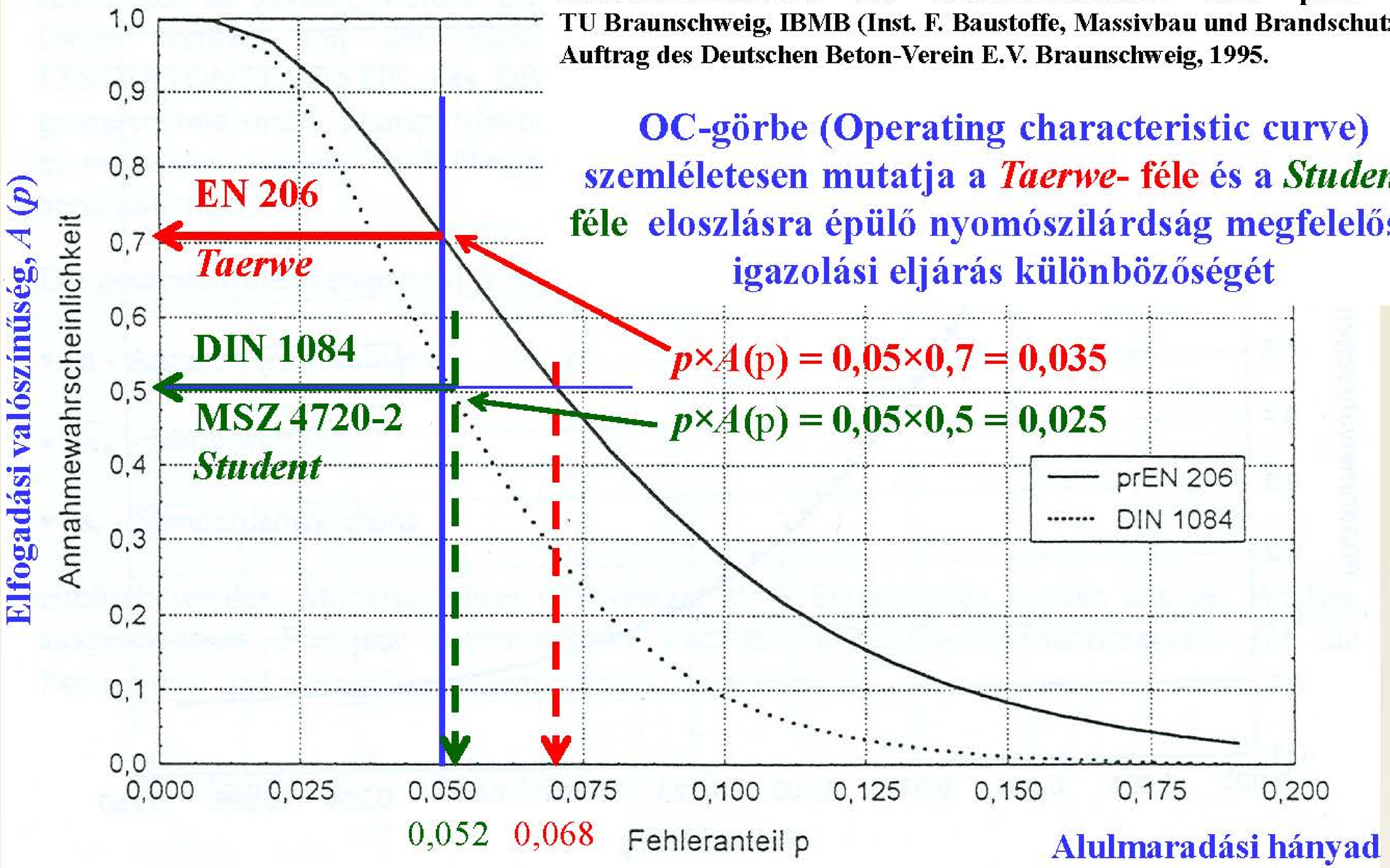


Bild 1: Annahmekennlinien zum Konformitätsnachweis nach prEN 206 und DIN 1084

Elfogadási jelleggörbe a megfelelőség igazolásához az EN 206 és az MSZ 4720-2 szabvány szerint

SZÓRÁS SZÁMÍTÁS ÖSSZEFÜGGÉSÉNEK LEVEZETÉSE

(ad MSZ 4798-1:2004)

A szórás számítás összefüggése

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{ci} - f_{cm,test}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{ci}^{\,2} - n \cdot f_{cm,test}^{\,2}}{n-1}}$$

Levezetés

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{ci} - f_{cm,test}\right)^2 =}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(f_{ci}^{\,2} - 2 \cdot f_{ci} \cdot f_{cm,test} + f_{cm,test}^{\,2}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_{ci}^{\,2} - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} f_{ci} \cdot f_{cm,test} + \sum_{i=1}^{n} f_{cm,test}^{\,2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_{ci}^{\,2} - 2 \cdot f_{cm,test} \cdot \sum_{i=1}^{n} f_{ci} + n \cdot f_{cm,test}^{\,2}$$

Minthogy $\quad f_{cm,test} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_{ci}}{n}, \quad ill. \quad \sum_{i=1}^{n} f_{ci} = n \cdot f_{cm,test}$

adódik, hogy $\quad \sum_{i=1}^{n} f_{ci}^{\,2} - 2 \cdot f_{cm,test} \cdot \sum_{i=1}^{n} f_{ci} + n \cdot f_{cm,test}^{\,2} =$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_{ci}^{\,2} - 2 \cdot f_{cm,test} \cdot n \cdot f_{cm,test} + n \cdot f_{cm,test}^{\,2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_{ci}^{\,2} - 2 \cdot n \cdot f_{cm,test}^{\,2} + n \cdot f_{cm,test}^{\,2} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} f_{ci}^{\,2} - n \cdot f_{cm,test}^{\,2}}$$

1.6. A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÉS A MATEMATIKAI STATISZTIKA NÉHÁNY ANYAGTANI VONATKOZÁSA

1.6.1. A TERMÉKEK MINŐSÉGELLENŐRZÉSI HIBASZINTJE – ELFOGADÁSI HATÁRA – FOGALMÁNAK MATEMATIKAI STATISZTIKAI ÉRTELMEZÉSE AZ ISO 2859 SZABVÁNYSOROZATBAN

1.6.1.1. Bevezetés

Mindennemű termelés velejárója az alapanyagok minőségének, a gyártási folyamatnak, valamint a késztermléknek a forgalomba hozatal előtti és az átadás-átvételkori minőségellenőrzése. Elméletileg a legcélravezetőbb lenne a termék minden egyes elemének, darabjának vizsgálatával teljes minőségellenőrzést végezni, ez azonban általában nagyon költséges és a gyakorlatban többnyire megoldhatatlan, olykor értelmetlen feladat lenne, gondoljunk csak a roncsolásos vagy az élettartam vizsgálatokra. Könnyű belátnunk, hogy a mintavételes minőségellenőrzés a teljes minőségellenőrzésnél olcsóbb és gyakorlatiasabb eljárás, amelynek létjogosultsága széleskörű, ugyanakkor számos ingadozó tényezőtől, sokszor a véletlentől függő megbízhatósága többé-kevésbé elmarad a teljes minőségellenőrzés megbízhatóságától.

A mintavételes minőségellenőrzés bizonytalanságain a matematikai statisztika eszközeivel lehetünk úrrá. A matematikai statisztika – amely a valószínűségszámításnak, a véletlen ingadozások, tömegjelenségek törvényszerűségei feltárása tudományának önálló fejezete – mindenekelőtt termelési, ipari, műszaki, fizikai, kémiai stb. tapasztalati adatokból levonható következtetések felhasználásával keresi a választ többek között az olyan elméleti minőségellenőrzési kérdésekre, mint például a termékhalmaz elfogadásának megbízhatósága – valamely előírt hibaszinten – a viszonylag kis elemszámú minta minősítéses vizsgálata alapján (*Vincze I.*, 1968), (*Hartung* et al., 2009).

A termékhalmaz, más szóval a tétel elfogadásának vagy visszautasításának valószínűsége a mintavétel és a minta vizsgálatának módszerétől, a tétel nagyságától (az N tételelemszámtól), a tételben lévő meg nem felelő, hibás elemek számától (M), a minta nagyságától (az n mintaelemszámtól), a mintában lévő nem megfelelő, hibás elemek megengedett számától ($c = Ac = k_{megengedett}$) és a termék (a tétel) előírt hibaszintjétől függ.

A minőségellenőrzési hibaszintek fogalmát a XX. század derekán dolgozták ki, és annak matematikai statisztikai értelmezése az ISO 2859 szabványsorozatban található. Az ISO 2859 szabványsorozatban megkülönböztetik például az átlagos kimenő hibaszintet (AOQ), az átlagos kimenő hibaszint határát (AOQL), az átvételi hibaszintet (AQL), a visszautasítási hibaszintet (LQ), hogy csak a talán legfontosabbakat említsük, amelyekkel kapcsolatos ismereteinket – jórészt az irodalom alapján – a következőkben foglaljuk össze.

Megjegyzés:

Hazánkban jelenleg az ISO szabványsorozat következő tagjai érvényesek:

MSZ ISO 2859-1:2008
MSZ ISO 2859-1:1999/AMD 1:2020
MSZ ISO 2859-2:2020
MSZ ISO 2859-3:2007
MSZ ISO 2859-4:2007
MSZ ISO 2859-5:2007

A minőségellenőrzési hibaszintekkel régebben például a visszavont MSZ 247-1:1977 szabványban foglalkoztak.

A TU Clausthal egyetem Institut für Mathematik intézete interaktív weboldalt tett közzé

- a minőségellenőrzési hibaszintek számítására: https://www.mathematik.tu-clausthal.de/interaktiv/qualitaetssicherung/durchschlupf/
- és a valószínűségi eloszlások számítására, amelyek némelyike a minőségellenőrzési hibaszint-számítások hátteréül is alkalmazható: https://www.mathematik.tu-clausthal.de/interaktiv/verteilungen/

1.6.1.2. AOQ Átlagos kimenő hibaszint

(MSZ ISO 2859-1:2008, MSZ EN 206:2013+A1:2017, illetve MSZ 4798:2016, MSZ 247-1:1977 visszavont)

Angolul: Average Outgoing Quality (AOQ),
németül: mittlerer Durchschlupf eines Stichprobenplanes

Az MSZ ISO 2859-1:2008 szabvány szerint:

> Az átlagos kimenő hibaszint a gyári (kimenő) termék hosszú távú átlagos minőségjellemzője, amely a megvásárolt (bejövő) termék minőségének egy adott értékére vonatkozik, beleszámítva minden átvett tételt, továbbá mindazokat a tételeket, amelyeket nem vettek át, *miután az ilyen tételeket ténylegesen 100%-osan ellenőrizték, és az összes nem megfelelő elemeket (egyedet) megfelelővel kicserélték.*

Az MSZ EN 206:2013+A1:2017, illetve MSZ 4798:2016 szabvány szerint:

> Az átlagos kimenő hibaszint az ismeretlen eloszlásnak – az előírt jellemző (karakterisztikus) értéke alatti – százalékos értéke megszorozva az eloszlás megfelelő átvételi valószínűségével, ha az érvényes megfelelőség-értékelést alkalmazzuk. A legmagasabb átlagos kimenő hibaszint (AOQ) ne haladja meg az 5%-ot.

Az átlagos kimenő hibaszintet (AOQ) minősítéses vizsgálattal lehet meghatározni.

A mintavételi terv (a minta vizsgálati eredménye) alapján átvett *N* elemszámú tétel általában bizonyos M = N×p elemszámú nem megfelelő (hibás) minőségű elemet tartalmaz. A sorozatosan végzett mintavételek minden *p* tényleges hibaarányra (tényleges alulmaradási hányadra) megmutatják az átvett tételek várható átlagos hibaarányát, amelyet az angol szóhasználat után átlagos kimenő hibaszintnek (AOQ) neveznek (*Vincze I.*, 1968).

Az AOQ átlagos kimenő hibaszint voltaképpen a minőségellenőrzés szerint megfelelőnek vélt termékek tényleges hibaaránya

(*p* alulmaradási hányada) várható mértékének mutatószáma; más tekintetben pedig tulajdonképpen – mint látni fogjuk – az OC-görbe *p* szerint transzformált alakja.

A *p* alulmaradási hányadú tétel hibás elemei számának $M(Y_1)$ várható értéke a tétel elemszáma $M(Y_2)$ várható értékének AOQ-szorosa (*Hartung* et al., 2009), (*Rinne* et al., 1995):

$$M(Y_1) = AOQ \times M(Y_2), \text{ és ebből: } AOQ(p) = \frac{M(Y_1)}{M(Y_2)}$$

Az AOQ-görbe az – $n = 100$ elemszámú, $c = k_{megengedett}$ számú megengedett nem megfelelő elemet tartalmazó minta vizsgálati eredménye alapján – átvett tételek átlagos hibaarányainak értékeit ($p_{átlag}$ = AOQ) tartalmazza a tétel tényleges hibaaránya (p) függvényében. Ha az $n = 100$ elemszámú vizsgálati mintában a nem megfelelő elemek száma (k) nem több, mint a megengedett $c = k_{megengedett}$ elemszám ($k \leq c = k_{megengedett}$), akkor a tételt átveszik, ha több ($k > c = k_{megengedett}$), akkor a tételt elutasítják.

Az AOQ értéke $p = 0$ és $p = 1$ esetén nulla.

Az AOQ(p) összefüggésből meghatározott AOQ-görbének a p_{AOQL} abszcissza-értéknél maximuma van, amelyet átlagos kimenő hibaszint határnak (AOQL) neveznek.

Az AOQ(p) függvény a minta és a tétel kezelésmódjától függően kilenc kombinációban írható fel: m_1–t_1, m_1–t_2, m_1–t_3, m_2–t_1, m_2–t_2, m_2 – t_3, m_3–t_1, m_3–t_2, m_3–t_3, amelyek jelentése:

- m_1: a mintát nem teszik vissza a tételbe, csak egyszer használják fel;
- m_2: a mintából az összes hibás elemet pótlás nélkül eltávolítják, és a mintát a tételbe visszateszik;
- m_3: a mintában az összes hibás elemet hibátlanra cserélik, és a mintát a tételbe visszateszik;
- t_1: a tételt csak egyszer használják fel;

- t_2: a mintavétel után maradó, $N - n$ elemszámú tétel-maradványból az összes hibás elemet pótlás nélkül eltávolítják, és a tételt újból felhasználják;
- t_3: a mintavétel után maradó, $N - n$ elemszámú tétel-maradványban az összes hibás elemet hibátlanra cserélik, és a tételt újból felhasználják (az $N - n$ elemszám változatlan marad).

A mintavétel utáni $N - n$ elemszámú tétel-maradványban az azzal átadásra kerülő hibás elemek számának várható értéke:

$$M(Y_1) = (N - n)\times p\times A(p),$$

ahol $A(p)$ a p alulmaradási hányadhoz tartozó elfogadási valószínűség, amely az OC-görbéből leolvasható. Az $M(Y_1)$ várható érték mind a kilenc kezelésmód esetén azonos.

A tétel átvett elemei Y_2 számának várható értéke a minta és a tétel kezelésmódjától függ.

Például az m_2–t_2 kezelésmód-kombináció esetén:

- a megengedettnél kevesebb hibás elem folytán – $A(p)$ valószínűséggel – átvett tétel elemeinek száma: $N - n\times p$, mivel az N tételelemszámot csak a visszatett mintából eltávolított hibás elemek száma csökkenti;
- a megengedettnél több hibás elem miatt – $(1 - A(p))$ valószínűséggel – visszautasított tétel elemeinek száma: $N - n\times p - (N - n)\times p = N - N\times p$, mivel ebben az esetben az N tételelemszámot nemcsak a visszatett mintából, hanem a mintavétel utáni tétel-maradványból eltávolított hibás elemek száma ($(N - n)\times p$) is csökkenti.

Ebből kifolyólag az m_2–t_2 kezelésmód-kombináció esetén a tétel Y_2 elemszámának várható értéke:

$$M(Y_2) = (N - n\times p)\times A(p) + (N - N\times p)\times(1 - A(p)) =$$
$$= N - n\times p - (N - n)\times p\times(1 - A(p))$$

Az $M(Y_1)$ és $M(Y_2)$ várható értéket az AOQ(p) összefüggésébe helyettesítve, a p értékétől függő átlagos kimenő hibaszint, feltéve, hogy a hibás (nem megfelelő) elemeket mind a tételből, mind a mintából pótlás nélkül eltávolítják, és a mintát a tételbe visszateszik:

$$\mathrm{AOQ}(p) = \frac{\mathrm{M}(\mathrm{Y}_1)}{\mathrm{M}(\mathrm{Y}_2)} = \frac{(N-n)\times p\times \mathrm{L}(p)}{N-n\times p-(N-n)\times p\times[1-\mathrm{L}(p)]},$$

ahol L(p) a például hipergeometrikus, binomiális vagy *Poisson*-eloszlásból meghatározott OC-görbével kifejezett A(p) átvételi valószínűség, [1 – L(p)] pedig az ugyanolyan valószínűségi eloszlásból meghatározott OC-görbével kifejezett (1 – A(p)) visszautasítási valószínűség (*Rinne* et al., 1995).

A betontechnológiában a transzportbeton tételnek a hibás elemek pótlás nélküli eltávolítását követő használata (t_2 kezelésmód) helyett csak az áttervezett, módosított összetételű transzportbeton tétel használata képzelhető el; és igaz, hogy az összetétel módosítás a már beépített beton minőségén nem változtat, de a t_2 helyett a t_3 kezelésmód számításba vételét lehetővé teszi, miközben a vizsgálati minta egyébként sem kerül vissza tételbe (m_1 kezelésmód), azaz betontechnológiai realitása a friss beton m_1–t_3 kezelésmód-kombinációjának van.

Az m_1–t_3 kezelésmód-kombináció során matematikai statisztikai értelmezésben a mintát nem teszik vissza a tételbe, és az $N - n$ elemszámú tétel-maradványban az összes hibás elemet hibátlanra cserélik, mely esetben az AOQ átlagos kimenő hibaszint értékeket a fentinél sokkal egyszerűbb

$$\mathrm{AOQ}(p) = p\times \mathrm{L}(p) = p\times \mathrm{A}(p)$$

összefüggéssel kell kiszámítani (*Rinne* et al., 1995). Ezek kiszámításához a tétel N elemszámának ismeretére sincs szükség, a tétel-maradvány fogalmának alkalmazása a nagy tételelemszámhoz (N) képest kis mintaelemszám (n) elhanyagolhatóságánál fogva is okafogyottá válik, és ezért háttérként a mintavisszatevés nélküli

hipergeometrikus valószínűség-eloszlást közelítő, egyszerűbb mintavisszatevéses binomiális valószínűség-eloszlással számított OC-görbe is bízvást szolgálhat (*Kausay*, 1970./8., Mélyépítéstudományi Szemle).

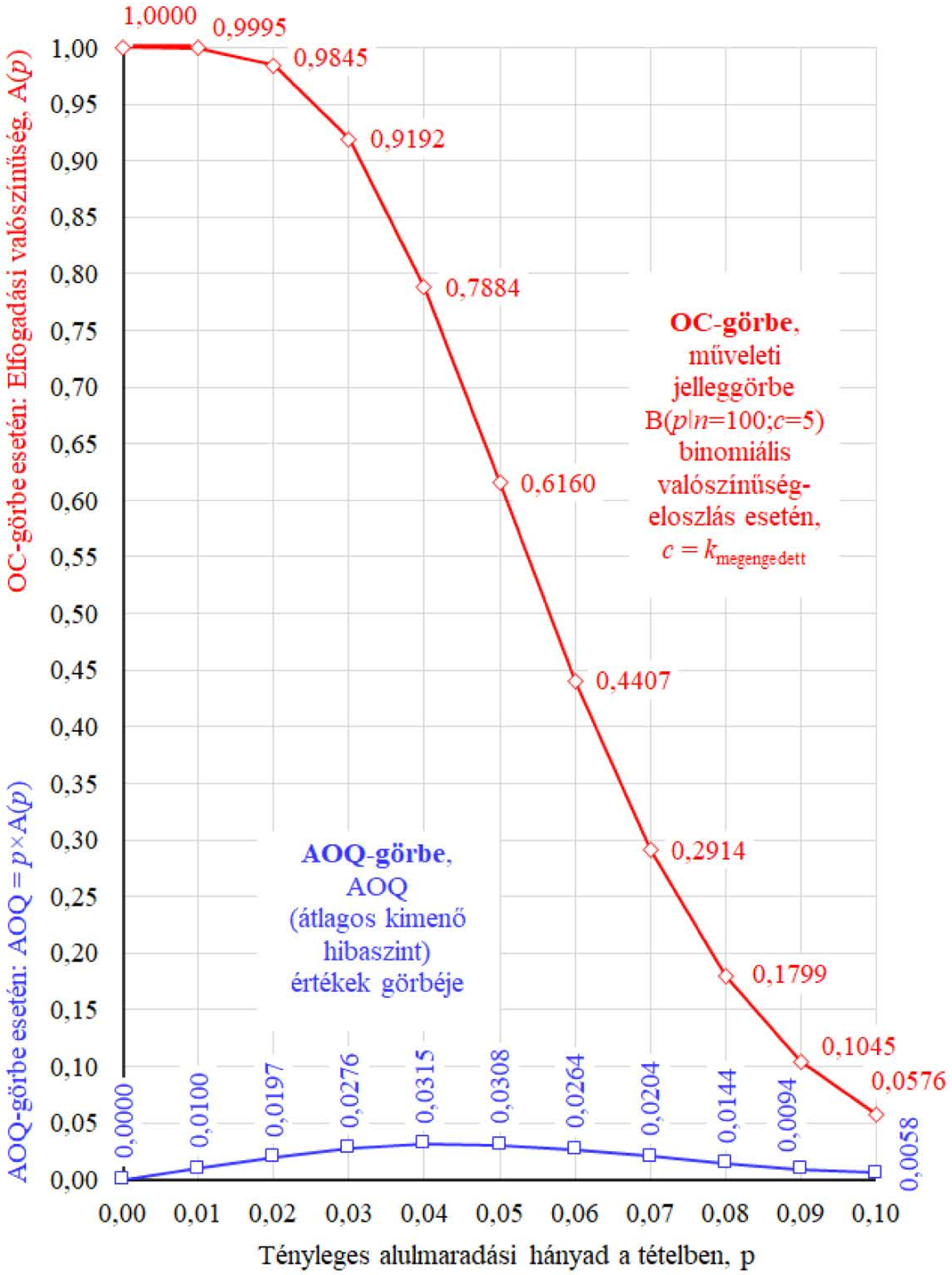
Az 1.6.1.*1. ábrán* m_1–t_3 minta-tétel kezelésmód-kombinációjú AOQ-görbére mutatunk be példát. Az 1.6.1.*1. ábrán* feltüntetett OC-görbe ordináta-értékeit Bi($p|n$=100; c=5) jelű binomiális valószínűség-eloszlással számítottuk ki, tehát az ábrabeli esetben a megengedett hibás (nem megfelelő) elemek száma az $n = 100$ elemszámú mintában $c = k_{\text{megengedett}} = 5$.

Belátható, hogy minél laposabb, alacsonyabb – az A(p) értékek csökkenése folytán – az AOQ-görbe, annál kisebb a minta vizsgálati eredménye alapján megfelelőnek vélt termékek tényleges hibaarányának (p alulmaradási hányadának) várható mértéke.

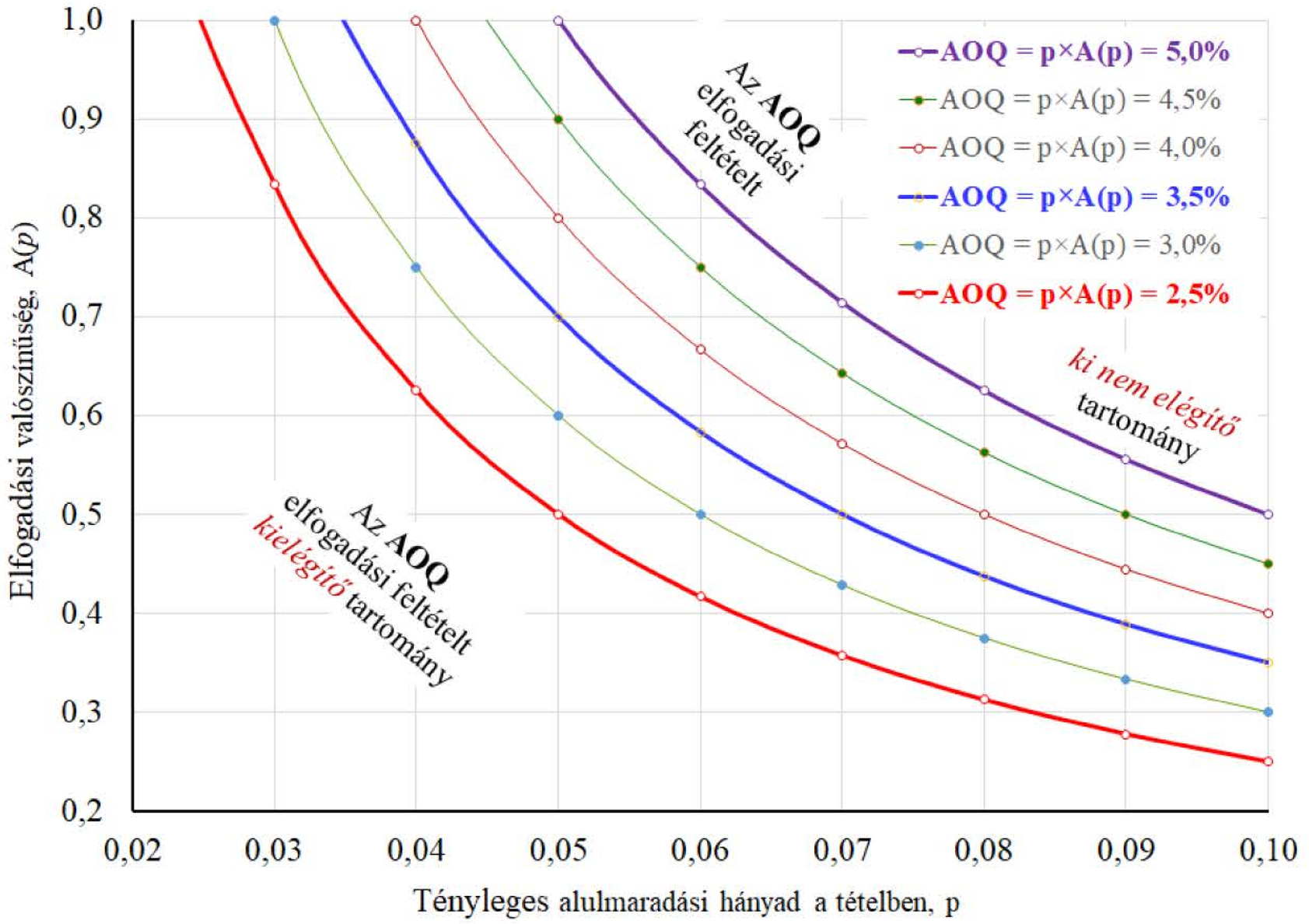
Jó minőségű tétel (p értéke kicsi) AOQ(p) értéke általában közel azonos a tétel tényleges alulmaradási hányadával (p), mert a jó minőségű tételt általában mindig átveszik. A rossz minőségű tétel (p értéke nagy) AOQ(p) értéke viszont általában számottevően kisebb, mint a p értéke.

Ha a legnagyobb átlagos kimenő hibaszintnél (p_{AOQL}) nagyobb p tart az 1,0-hez ($p_{\text{AOQL}} < p \rightarrow 1{,}0$), akkor AOQ($p$) a nullához tart (AOQ($p$) $\rightarrow$ 0,0). (*Rinne* et al., 1995).

Általában és az 1.6.1.*1. ábrán* is, az AOQ(p) = $p \times$A(p) értékek a tétel tényleges alulmaradási hányada (p) függvényében változnak, amely változás mértékének adott p tekintetében az A(p) = f(p) függvényalakú OC-görbe a letéteményese. Elképzelhetők azonban olyan fiktív OC-görbék, amelyek esetén az AOQ = $p \times$A(p) érték a p értékétől függetlenül konstans, és amelynek folytán a fiktív OC-görbék $\text{AOQ}_{\text{const}}$ konstans együtthatójú A(p) = $\text{AOQ}_{\text{const}}/p$ alakú – a matematikai statisztikában elfogadási görbének nevezett – hiperbolák. Az 1.6.1.*2. ábrán* például $\text{AOQ}_{\text{const}}$ = 0,05; 0,045; 0,04; 0,035; 0,03; 0,025 együtthatójú A(p) = $\text{AOQ}_{\text{const}}/p$ alakú elfogadási görbék láthatók.



1.6.1.**1. ábra:** AOQ-görbe, az AOQ-értékek görbéje Bi(p|n=100; c=5) binomiális valószínűség-eloszlás esetén, ha a mintát nem teszik vissza a tételbe és az $N - n$ elemszámú tétel-maradványban az összes hibás elemet hibátlanra (megfelelőre) cserélik



1.6.1.**2. ábra:** Konstans AOQ együtthatójú A(p) = AOQ/p alakú elfogadási görbék, mint elfogadási határvonalak (*Kausay*, 2006./2., Vasbetonépítés)

Az 1.6.1.*2. ábrán* szereplő

- AOQ_{const} = 0,05 (5%) együtthatójú, A(5%) = 1,0 elfogadási valószínűségű elfogadási görbe biztonsági tartalékkal nem rendelkezik;
- AOQ_{const} = 0,035 (3,5%) együtthatójú, A(5%) = 0,7 elfogadási valószínűségű elfogadási görbe az MSZ EN 206:2013+A1:2017 (MSZ 4798:2016) szabvány $\lambda_{n=15}$ = 1,48 alulmaradási tényező alapú beton-nyomószilárdsági elfogadási feltétele;
- AOQ_{const} = 0,025 (2,5%) együtthatójú, A(5%) = 0,5 elfogadási valószínűségű elfogadási görbe az MSZ EN 1992-1-1:2010 (Eurocode 2) és a visszavont MSZ 4720-2:1980 szabvány $t_{n=\infty}$ = 1,645 alulmaradási tényező alapú beton-nyomószilárdsági elfogadási feltétele,

ahogy ez a Vasbetonépítés című folyóiratban megjelent cikkben (*Kausay*, 2006./2., Vasbetonépítés) az alábbiak mellett olvasható:

Bármiféle megfelelőségi feltétel felfogható egyfajta szűrőnek is: a megfelelőnek talált mintákat átengedi, a nem-megfelelőnek találtakat pedig visszatartja. Tételezzük fel, hogy olyan anyagot vizsgálunk – például betonacélt – amelynek megfelelősége még a beépítés előtt ellenőrizhető, és a beépítés előtt a minőséget folyamatosan ellenőrizzük is, a megfelelőnek találtakat beépítjük, a nem-megfelelőket pedig tökéletes minőségűekkel helyettesítjük. Ekkor a megfelelőségi feltétel által megszűrt sokaság minősége nyilván jobb lesz, és a $p \times A(p) \leq 5\%$ feltétel biztosítja, hogy a megszűrt sokaság p értéke már 5% alatt maradjon. Fontos megjegyezni, hogy még ebben az esetben is *folyamatos* (és nem szúrópróbaszerű!) *ellenőrzést* feltételezünk.

Beton esetében a nem-megfelelőnek ítélt szállítmányokat beépítés előtt nyilván nem lehet tökéletes minőségűekkel helyettesíteni, hiszen mire a nem-megfelelőség kiderül, addigra a betont már rég beépítettük. A $p \times A(p) \leq 5\%$ feltétel akkor lesz értelmes, ha folyamatosan nyomon követjük, hogy melyik beton szállítmány hová építettük be, és azt az építményrészt, amelybe a vizsgálat eredménye szerint nem megfelelő betonszállítmány került, azt utólagosan megerősítjük vagy más módon elérjük, hogy gyakorlati szempontból tökéletes legyen, azaz a nem-megfelelő, de beépített betonszállítmányokat utólagosan „tökéletessé” transzformáljuk.

Az MSZ EN 206-1:2002, majd MSZ EN 206:2013+A1:2017 (MSZ 4798-1:2004, illetve MSZ 4798:2016) betonszabványban az n = 15 mintaszámhoz tartozó *Taerwe*-féle $\lambda_{n=15}$ = 1,48 értékű alulmaradási tényezőt egy ilyen, *folyamatos vizsgálatot és utólagos megerősítést feltételező* AOQ_{const} = 0,035 (3,5%) átlagos kimenő hibaszintű, A(5%) = 0,7 elfogadási valószínűségű minőségbiztosítási rendszer részeként határozták meg. Komoly hiányosság, hogy ezekbe a szabványokba csak megfelelőségi feltétel került be, a folyamatos nyomon követés és utólagos javítás kötelezettsége nélkül; szemben a nagyobb biztonsággal számoló MSZ EN 1992-1-1:2010 (Eurocode 2) és visszavont MSZ 4720-2:1980 szabvánnyal, amelyekben a beton nyomószilárdságának megfelelőségét magasabb, értékesebb, egyben etikusabb minőségi szinten, akár ritkábban, csak szúrópróbaszerűen ellenőrizve, a *Student*-féle $t_{n=\infty}$ = 1,645 alulmaradási tényezőjű, AOQ_{const} = 0,025 (2,5%) átlagos kimenő hibaszintű, A(5%) = 0,5 elfogadási valószínűségű megfelelőségi feltétellel biztosítják, illetve biztosították (*Kausay*, 2006./2., Vasbetonépítés).

1.6.1.3. AOQL Átlagos kimenő hibaszint határa, átlagos kimenő minőségi határérték, legnagyobb átlagos kimenő hibaszint

(MSZ ISO 2859-1:2008, MSZ EN 206:2013+A1:2017, illetve MSZ 4798:2016, MSZ 247-1:1977 visszavont)

Angolul: Average Outgoing Quality Limit (AOQL),
németül: maximaler mittlere Durchschlupf eines Stichprobenplanes

Az „Average Outgoing Quality Limit, AOQL” (átlagos kimenő minőségi határérték) alapeszméjét az USA-beli Bell Telephone Laboratories és Western Electric Company mérnökei 1923-1927 között, telefonközpont-gyártmányok minőségellenőrzésére dolgozták ki, majd az évek során nagyon sok, az AOQL alapeszme alkalmazását megkönnyítő különböző, ma is használható minőségellenőrzési mintavételi terv, eljárás és táblázat született (*Dodge* et al., 1959). *Dodge* et al. (1959) táblázataiban megkülönböztették a valószínűségi értékeket a vevő kockázata (A. típusú kockázat, a vevő kockázata a résztermék átadás-átvétele során a véges nagyságú gyártási tételből, résztermékből vett minták vizsgálata alapján) és a gyártó kockázata (B. típusú kockázat, a gyártó kockázata a termék folyamatos gyártása során a határozatlan nagyságú, folyamatosan gyártott termékből vett minták vizsgálata alapján) esetére.

Az MSZ ISO 2859-1:2008 szabvány szerint:

Az átlagos kimenő hibaszint határa az átlagos kimenő hibaszintek maximuma az összes olyan lehetséges elfogadható minőségre, amelyeket egy adott átvételi mintavételi tervhez bemutattak. A szabványban közelítő AOQL-értékek találhatók minden egyes eglépcsős mintavételi tervre, például a 8-A táblázatban normális ellenőrzés, a 8-B táblázatban szigorított ellenőrzés esetére.

Az MSZ EN 206:2013+A1:2017, illetve MSZ 4798:2016 szabvány szerint:

> Az átlagos kimenő hibaszint határa (AOQL) az elfogadott betongyártáskor, illetve kiszállításkor az előírt jellemző (karakterisztikus) érték alatti legnagyobb átlagos hányad. E szabványok 8.2.1.3.2. szakasza alatti C módszerrel a beton-nyomószilárdság megfelelőségét a folyamatos gyártás során minőségszabályozási kártyák alkalmazásával is lehet ellenőrizni, amely esetben az átlagos kimenő hibaszint határa (AOQL) legfeljebb 5% lehet.
>
> Az 5%-os AOQL átlagos kimenő hibaszint határ követelményét teljesítő minőségszabályozási kártyák alkalmazására és azok javasolt elfogadási alapelveire a CEN/TR 16369:2012 európai műszaki jelentés tartalmaz útmutatásokat. A Cusum és a Shewhart minőségszabályozási kártyák folyamatos betongyártásban való alkalmazásának feltételei az MSZ EN 206:2013+A1:2017, illetve MSZ 4798:2016 szabvány H mellékletében találhatók; a Cusum minőségszabályozási kártyák betongyártás- és megfelelőség-ellenőrzési szerepéről az irodalom szól (például: *Caspeele* et al., 2009).

Értelmezésünk szerint átlagos kimenő hibaszint határnak vagy átlagos kimenő minőségi határértéknek (AOQL) az AOQ-görbe legnagyobb értékét nevezik (legnagyobb átlagos kimenő hibaszint), amely az OC-görbe inflexiós pontjának függőlegesében jelenik meg. Helye (p_{AOQL}) és értéke (AOQL) az OC-görbe jellegétől (hipergeometrikus, binomiális vagy *Poisson*-eloszlású) és futásától, valamint a minta-tétel kezelésmód-kombinációtól függ (*Vincze I.*, 1968), (*Rinne* et al., 1995), (*Hartung* et al., 2009).

A p_{AOQL} és az AOQL értéke mérsékelt pontossággal az AOQ-görbéből is megbecsülhető, például a binomiális valószínűség-eloszlású OC-görbéből szerkesztett 1.6.1.*2. ábra* esetén: $p_{AOQL} \sim 0{,}043$ és AOQL ~ 0,032.

Valamely görbének ott van szélsőértéke, ahol a görbe érintője vízszintes, hajlásszöge és iránytangense, azaz a függvény deriváltjának (differenciálhányadosának) az értéke zérus (*Bárczy*, 1977).

Az m_1–t_3 kezelésmód-kombináció esetén az átlagos kimenő hibaszint függvény alakja $AOQ(p) = p \times A(p)$, amelyet p szerint a szorzatfüggvények deriválási szabálya – $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$ – alapján deriválva, és nullával egyenlővé téve a

$$AOQ(p)' = \frac{d[AOQ(p)]}{dp} = \frac{d[p \times A(p)]}{dp} = A(p) + p \times \frac{dA(p)}{dp} = 0$$

összefüggésre jutunk (*Rinne* et al., 1995).

Ezt az összefüggést p-re megoldva megkapjuk az átlagos kimenő hibaszint legnagyobb értékének (AOQL) a helyét (p_{AOQL}) az abszcissza-tengelyen. A nem-lineáris egyenlet csak az OC-görbe $A(p)$ függvényének ismeretében és csak közelítéssel oldható meg.

A megoldáshoz *Dodge* et al. (1959) mintavételes ellenőrző táblázatokat tartalmazó könyvében található egy, a *Poisson*-eloszlású OC-görbe alkalmazásával kidolgozott segédtáblázat (Table 2-3), amelynek használatához ismerni kell a mintaelemszámot (n) és a tételelemszámot (N). A segédtáblázat használata egyszerűbb, ha az elemszámok aránya $n/N < 0{,}05$, mert ebben esetben a tételelemszám (N) ismeretére nincs szükség, a hibás elemek megengedett számának ($c = k_{megengedett}$) értelmezése folytán pedig a mintaelemszám egyébként is $n = 100$. Ezért $n/N < 0{,}05$ esetén a következő összefüggésekkel lehet számolni: $p_{AOGL} = x/n = x/100$ és $AOQL = y/n = y/100$, ahol az x és az y a *Dodge*-féle segédtáblázatból a hibás elemek megengedett számának ($c = k_{megengedett}$) függvényében olvasható ki, például $c = k_{megengedett} = 5$ esetén $x = 4{,}35$ és $y = 3{,}168$, amelyekből $p_{AOQL} = 0{,}0435$ és $AOQL = 0{,}03168$ adódik (lásd az 1.6.1.*2. ábrát*).

1.6.1.4. AQL Átvételi hibaszint, elfogadási minőségi határérték, elfogadási minőségi szint, elfogadható minőségi szint

(MSZ ISO 2859-1:2008, MSZ ISO 2859-1:1999/Amd 1:2020, MSZ ISO 2859-10:2007 visszavont, ISO 3534-2:2006, ISO 3951-1:2013, DIN 40080:1979, MSZ EN 206:2013+A1:2017, MSZ 4798:2016, MSZ 247-1:1977 visszavont)

Angolul: AQL Acceptance quality level,
németül: annehmbare Qualitätslage, Gutgrenze

Az AQL átvételi hibaszint a termék legrosszabb eltűrhető minősége (ISO 3534-2:2006, DIN ISO 3534-2:2013).

Az MSZ ISO 2859-1:2008 szabvány szerint, amely szabvány megegyezik az ISO 2859-1:1999 nemzetközi szabvánnyal és tartalmazza az ISO 2859-1:1999/Cor. 1:2001 helyesbítést is:

> Az MSZ ISO 2859-1 szabvány az átvételi hibaszinttel (AQL) jelzett, minősítéses jellemzők szerinti mintavételi programokat ad meg.
>
> Az átvételi hibaszint (AQL) az eltűrhető legrosszabb folyamatátlag minőségszintje az átvételi mintavételre bocsátott tételek egy folyamatos sorozatában.
>
> Adott AQL-érték esetén a mintavételi program a tételek többségét átveszi, ha ezekben a tételekben a minőségszint (a nem megfelelő elemek aránya) nem magasabb az AQL-értéknél.
>
> Az átvétel valószínűsége az AQL mellett az adott AQL-hez tartozó mintanagyságtól is függ, mivel az AQL nagy minták esetében általában nagyobb, mint a kicsik esetében.
>
> Az AQL a mintavételi terv egyik paramétere, és nem szabad összetéveszteni a folyamatátlaggal, amely a gyártási folyamat működési szintjét írja le. Elvárjuk, hogy a folyamatátlag jobb legyen az AQL-nél; így elkerülhető a nagyszámú visszautasítás. *Az AQL értéke nem haladhatja meg a 10%-ot.*

A mintavételi programokat a nemzetközi szabványokban (például az ISO 2859 szabványsorozatban) úgy tervezték, hogy az AQL-értéknél következetesen jobb folyamatátlag tartására ösztönözzék a gyártót. Egyébként nagy lenne a kockázata, hogy az ellenőrzés átvált a szigorított ellenőrzésre, amelyben a tétel átvételének követelményei sokkal szigorúbbak. Bár nagy valószínűséggel átvehetők egyes olyan tételek, amelyeknek minősége olyan rossz, mint az átvételi hibaszint (AQL), az átvételi hibaszint kijelölése (szerződésben meghatározott AQL-érték) nem azt jelenti, hogy ez a kívánatos minőségszint, és a szállítónak akár egyetlen nem megfelelő tételt is joga van szándékosan beszállítani.

Az ISO 2859-1:1999 nemzetközi szabvány hátterét a – DIN ISO 2859-1:1993 bevezetésekor visszavont – DIN 40080:1979 szabvány képezte.

A minősítéses jellemzők szerinti mintavételes ellenőrzést általánosan ismertető, visszavont MSZ ISO 2859-10:2007 szabvány szerint:

A visszavont MSZ ISO 2859-10:2007 szabvány a *minősítéses jellemzők* szerinti mintavételes ellenőrzést általánosan tárgyalta. Az átvételi mintavételes ellenőrzés alapvető célja annak igazolása, hogy a gyártó által bemutatott tételek minősége legalább olyan jó, mint a kölcsönösen egyeztetett szint. Az ISO 2859 szabványsorozat közös paraméteren, például az AQL- vagy az LQ-értéken alapul.

A mintavételi tervek rendszerét kiegészíti a *méréses jellemzők* szerinti ellenőrzés, amelyet szintén az AQL jelez. Ezeket a terveket az ISO 3951 sorozat tagjai (például ISO 3951-1:2013) tartalmazzák.

Az ISO 2859-3:2005 (MSZ ISO 2859-3:2007) szabványban *tételkihagyásos* eljárásokkal foglalkoznak, amelyeket az AQL-értékkel megadott folyamatok esetén használunk az átadás vagy a megfigyelés meghatározott időtartamán. Ha a minőségszint folyamatosan kiváló, akkor az ISO 2859-3:2005 szabvány alkalmazása néha gazdaságosabb, mint az ISO 2859-1:1999 (MSZ ISO 2859-1:1999/Amd 1:2020) szabvány enyhített

mintavételi eljárása. Az ISO 2859-1:1999 szabványhoz hasonlóan az ISO 2859-3:2005 szabvány is egyetlen forrásból származó folyamatos tételsorozatokra alkalmazható.

A *tételenkénti* ellenőrzés átvételi hibaszinttel (AQL) jelzett szekvenciális (többlépcsős) mintavételi terveinek rendszerét az ISO 2859-5 (MSZ ISO 2859-5:2007) szabvány tárgyalja.

Az ISO 2859-1 szabványt elsődlegesen olyan folytonos tételsorozatok ellenőrzésére dolgozták ki, amelyek azonos gyártásból vagy szolgáltatási folyamatból származnak. Ebben az esetben a megfelelő védelmet (vagy a nem megfelelő elemek százalékos arányának maximális folyamatátlagát) a normális ellenőrzésről szigorított ellenőrzésre való áttérési szabállyal tartják fenn, ha bizonyos számú nem átvehető (visszautasítási számú) tételt találtak az egymás utáni tételek rövid sorozataiban.

Ha a minőség nagyon jó, akkor az ISO 2859-1 szabvány szerint át lehet térni enyhített ellenőrzésre. Ez olyan eljárást ad meg, amelynek során, ha kevesebb mintát használnak, akkor a gyártó kockázata csökken, a vevő kockázata pedig növekszik. Ez akkor indokolt, ha a folyamatátlag állandóan kisebb, mint az előírt átvételi hibaszint (AQL). Ha a folyamatátlag legalább 10 tételen keresztül nagyon sokkal kisebb az AQL-nél, akkor némely vevő a tételkihagyásos eljárásokat választja (lásd az ISO 2859-3 szabványt). Ez sokkal gazdaságosabb lehet, mint az ISO 2859-1 szabványban leírt enyhített ellenőrzés.

Némely esetben, különösen akkor, ha rutinszerű gyártásból származó vagy nem kritikus elemekről van szó, a vevő bízhat a termék kisszámú mintái ellenőrzési gyakorlatának igénybevételében, feltéve, hogy nulla a nem megfelelő termék, elfogadja a tételt. Például, ha a mintanagyság nyolc és az átvételi szám nulla, ez ekvivalens olyan kis tételekre vonatkozó mintavételi tervekkel, amelyekhez AQL=1,5% tartozik normális ellenőrzés esetén, vagy AQL=0,65% tartozik enyhített ellenőrzés esetén. Lásd az ISO 2859-1:1999 szabvány 2-A és 2-C táblázatát.

A visszavont MSZ ISO 2859-10:2007 szabványban a mintavételi tervekre példák is találhatók.

A visszavont MSZ 247-1:1977 szabvány szerint az átvételi hibaszint (AQL) egyedi tétel esetén az a megengedett legnagyobb hibaszint, illetve sorozat-tételek esetén az a megengedett legnagyobb átlaghibaszint, amely a termék átvétele céljából még megfelelő. Az átvevő kockázatának meghatározásához adott mintavételi ellenőrzési terv esetén a terv jelleggörbéjét (OC-görbéjét) kell felhasználni, vagy ha az indokolt, ki kell számítani az AOQL átlagos kimenő hibaszintet.

Az MSZ EN 206:2013+A1:2017, illetve MSZ 4798:2016 szabvány szerint:

> Az átvételi hibaszint (AQL) olyan ismeretlen eloszlás százalékos értéke, amely az előírt jellemző tulajdonsághoz képest kedvezőtlenebb, és amely mellett még fennáll a betongyártás megfelelősége. E szabványok 24. táblázata – hivatkozva az ISO 3951-1:2013 szabványra – AQL = 4% átvételi hibaszinten adja meg a száltartalom, a betontestsűrűség, a legnagyobb víz-cement tényező és a legkisebb cementtartalom 22. táblázat szerinti megfelelőségi feltételeihez tartozó átvételi számokat a vizsgálati eredmények számának függvényében, 100 vizsgálati eredményig.
>
> Ha a vizsgálati eredmények száma nagyobb, mint 100, akkor a megfelelő átvételi számok az MSZ ISO 2859-1:2008 szabvány 2-A táblázatából (egylépcsős mintavételi tervek normál ellenőrzésre) választhatók ki.

A DIN ISO 2859-1:2014 szabvány bevezetésekor visszavont DIN 40080:1979 szabvány történetével és tartalmával *Rinne* et al. (1995) részletesen foglalkozik:

Az egykori DIN 40080:1979 szabvány tárgyát képező egylépcsős (egyszeres, egyfokozatú) vizsgálati terv (angolul: attribute sampling tables, attribute sampling schemes, németül: attributive Prüfung) alapjait a II. világháború alatt New Yorkban, a Columbia Egyetemen

(Columbia University) kezdték kidolgozni a Pentagon megbízásából, a hadi szállítások minőségvizsgálati előírásaihoz. Ezek a kezdeti előírások számos átdolgozás és javítás után 1950-ben a Military Standard 105A (röviden: MIL-STD 105A) szabványban, majd 1963-ban a Military Standard 105D (röviden: MIL-STD 105D) szabványban öltöttek testet (*Dodge*, 1973). A MIL-STD 105D szabványt gyakorlati tapasztalatok felhasználásával, nem pedig kimondottan matematikai modell alapján fejlesztették ki.

Amerikai polgári alkalmazás céljára a MIL-STD 105D szabványt az ANSI (American National Standards Institute) Amerikai Nemzeti Szabványügyi Intézet – együttműködve az ASQC (American Society for Quality Control) Amerikai Minőségszabályozási Társasággal – 1974-ben átdolgozta és korszerű változatban ANSI/ASQC Z1.4 néven közzé tette. Ezt az amerikai szabványt az ISO (International Organization for Standardization) Nemzetközi Szabványügyi Testület még ebben az évben csekély változtatásokkal átvette és az ISO 2859 szabvány kiadásával nemzetközi szabvány rangjára emelte. *A visszavont DIN 40080:1979 német szabvány az ISO 2859 nemzetközi szabvány szöveghű változata.*

A DIN 40080:1979 szabványt elsősorban sorozatgyártású tételek AQL-rendszerbeli vizsgálatára dolgozták ki. A szabvány különbséget tesz az általános (I., II. és III.) és a különös (speciális, S-1, S-2, S-3 és S-4) vizsgálati szintek között. A vizsgálati szintek a tételelemszámok (N) függvényét képezik. A gyakorlatban az általános vizsgálati szintek közül általában a II. vizsgálati szintet alkalmazzuk; a hiba-érzékelés az I. vizsgálati szint esetén kisebb, a III. vizsgálati szint esetén nagyobb. A szelektivitás, azaz az OC-görbék meredeksége az I. vizsgálati szintről a III. vizsgálati szintre haladva növekszik. A különös vizsgálati szinteket akkor használjuk, ha a mintaelemszám kicsi és a kockázat nagyobb vagy roncsolásos vizsgálatok esetén.

Valamennyi vizsgálati szinten választhatunk a számunkra előnyösebb, közelítőleg OC-egyenértékű egylépcsős, kétlépcsős, hétlépcsős (egyszeres, kétszeres és hétszeres, illetve fokozatú) vizsgálati fokozat között. Amig a kezelési nehézségek a vizsgálati szint-számok

növekedésével nőnek, addig az átlagos mintaelemszám csökken. A vizsgálati szinten belül három alszint található, amelyek csökkentett (redukált), normál és éles vizsgálatként alkalmazhatók. Általában a normál vizsgálatból kiindulva, kapott vizsgálati eredmények függvényében váltani lehet egy másik alszintre.

1.6.1.**1. táblázat:** A vizsgálati terv DIN 40080:1979 szabvány szerinti betűjele (*Rinne* et al., 1995)

Tételelemszám *N*	Különös vizsgálati szint				Általános vizsgálati szint		
	S-1	S-2	S-3	S-4	I.	II.	III.
2 – 8	A	A	A	A	A	A	B
9 – 15	A	A	A	A	A	B	C
16 – 25	A	A	B	B	B	C	D
26 – 50	A	B	B	C	C	D	E
51 – 90	B	B	C	C	C	E	F
91 – 150	B	B	C	D	D	F	G
151 – 280	B	C	D	E	E	G	H
281 – 500	B	C	D	E	F	H	J
501 – 1200	C	C	E	F	G	J	K
1201 – 3200	C	D	E	G	H	K	L
3201 – 10000	C	D	F	G	J	L	M
10001 – 35000	C	D	F	H	K	M	N
35001 – 150000	D	E	G	J	L	N	P
150001 – 500000	D	E	G	J	M	P	Q
> 500000	D	E	H	k	n	Q	R

A DIN 40080:1979 szabvány szerinti, nagybetűvel jelölt vizsgálati terv az 1.6.1.*1. táblázatból* kiválasztható tételelemszámnak (*N*) és a különös vagy általános vizsgálati szintnek a függvénye. A tételelemszám és a vizsgálati szint a vizsgálati terv jellemzője.

1.6.1.**2. táblázat:** A vizsgálati terv betűjele és hozzárendelt mintaelemszáma normál és éles vizsgálati alszinten a DIN 40080:1979 szabvány szerint (*Rinne* et al., 1995)

Vizsgálati terv betűjele	Mintaelemszám, *n*		
	Egylépcsős (egyszeres, egyfokozatú)	Kétlépcsős (kétszeres, kétfokozatú)	Hétlépcsős (hétszeres, hétfokozatú)
	vizsgálat		
A	2	–	–
B	3	2	–
C	5	3	–
D	8	5	2
E	13	8	3
F	20	13	5
G	32	20	8
H	50	32	13
J	80	50	20
K	125	80	32
L	200	125	50
M	315	200	80
N	500	315	125
P	800	500	200
Q	1250	800	315
R	2000	1250	500

A vizsgálati terv minden betűjeléhez tartozik egy vizsgálati utasítás, amelyhez gyakorlati megfontolások alapján egylépcsős, kétlépcsős vagy hétlépcsős (egyszeres, kétszeres vagy hétszeres, illetve fokozatú) vizsgálat csatolható. E vizsgálatok mintaelemszámai az 1.6.1.*2. táblázatban* találhatók. A kétlépcsős és a hétlépcsős vizsgálat mintaelemszáma minden vizsgálati szinten konstans.

A vizsgálati terv többi paramétere a kiválasztott vizsgálati alszinttől (vizsgálati élességtől: csökkentett, normál, éles) és a kívánt átvételi hibaszinttől (AQL-értéktől) függ. Az átvételi hibaszint egy olyan elfogadható minőségi szint, amelyen a tétel (halmaz) elfogadásának valószínűsége ($\omega = A(p)$) előre meghatározott, a DIN 40080:1979 szabvány szerint mintegy: $0{,}80 \leq \omega \leq 0{,}99$. A német szabványban valamely tétel (halmaz) minőségi szintjének mértéke minősítéses vizsgálat (Gut-Schlecht Prüfung → jó-rossz vizsgálat) esetén az alulmaradási hányad százalékos értéke ($100 \times p$) vagy, ha az elemnek több hibája is lehet, akkor a hibás elemek 100 tételelemszámra vonatkoztatott átlagos értéke ($100 \times \lambda$). Mindkét esetben ugyanazokat az AQL-értékeket kell használni, amelyeket a DIN 40080:1979 szabványban előnyös AQL-értékeknek (AQL-Vorzugswerte) neveznek. A DIN 40080:1979 szabvány csak erre a 26 előnyös AQL-értékre vonatkozik (lásd az 1.6.1.*3. táblázatot*).

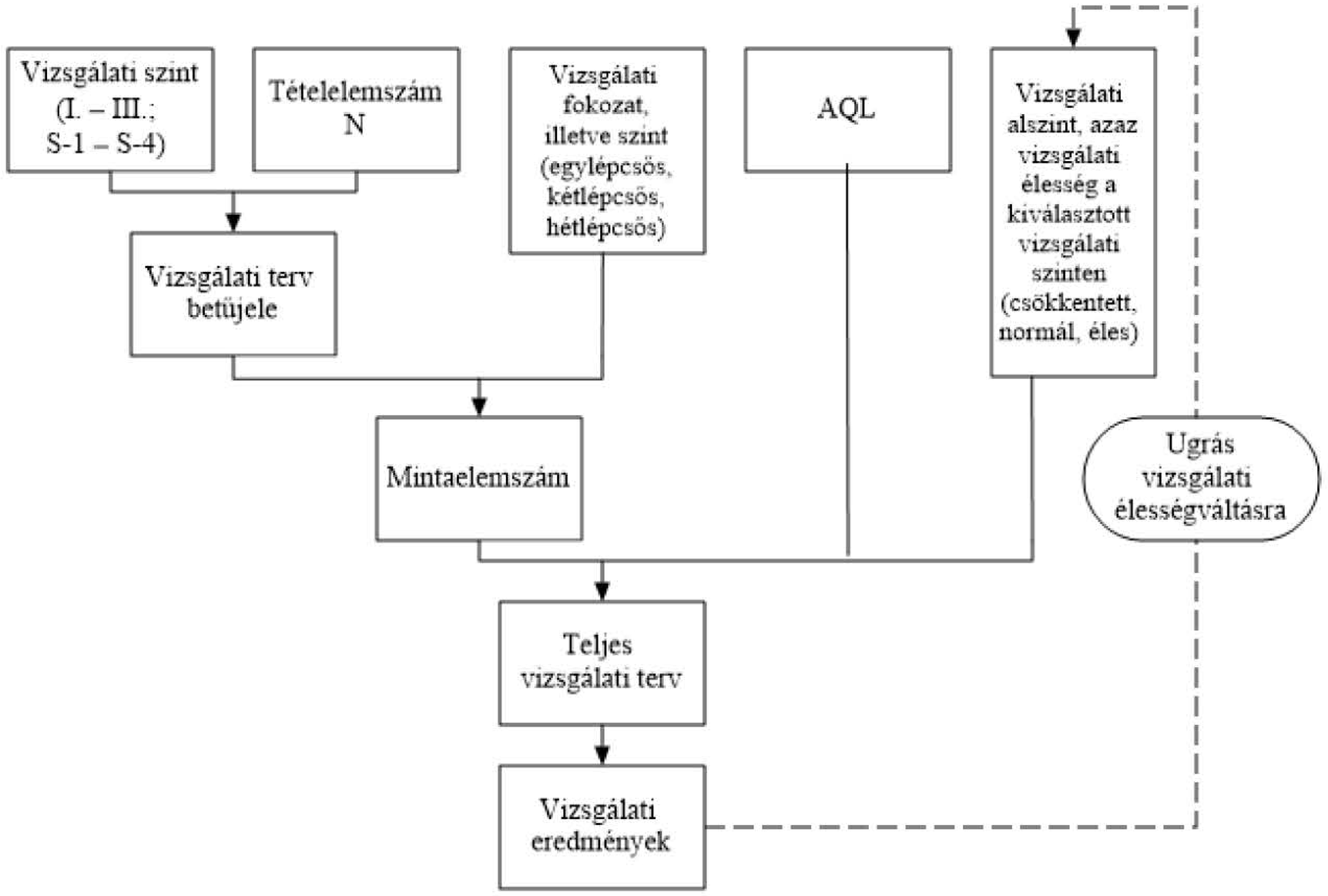
1.6.1.**3. táblázat:** A DIN 40080:1979 szabvány szerinti előnyös AQL-értékek (AQL-Vorzugswerte), százalék (*Rinne* et al., 1995)

DIN 40080:1979 szabvány szerinti előnyös AQL-értékek (AQL-Vorzugswerte), százalék				
0,010	0,015	0,025	0,040	0,065
0,10	0,15	0,25	0,40	0,65
1,0	1,5	2,5	4,0	6,5
10	15	25	40	65
100	150	250	400	650
1000				
Megjegyzés: MSZ ISO 2859-1:2008 szabvány szerint az AQL értéke nem haladhatja meg a 10%-ot.				

A DIN 40080:1979 szabványbeli előnyös AQL-értékek az $\sqrt[5]{10} = 1{,}585$ szorzóval kapott geometriai sort alkotnak (például: $0{,}1 \times 1{,}585 \cong 0{,}15$; $0{,}15 \times 1{,}585 \cong 0{,}25$; $0{,}25 \times 1{,}585 \cong 0{,}4$). A 10 alatti előnyös AQL-értékek vagy a hibás elemek százalékos arányának, vagy 100 tételelemre eső hibának, a 10-től kezdődő előnyös AQL-értékek pedig csak 100 tételelemre eső hibának tekintendők.
A DIN 40080:1979 szabvány értelmezésében például az AQL = 0,4 érték 0,4%-os elutasítási arányt vagy 100 tételelemszámra eső 0,4 átlagos hibaszámot, az AQL = 25 érték pedig csak 100 tételelemszámra eső 25 átlagos hibaszámot jelent.

Az AQL-érték megadása egyedi termék vizsgálata esetén nem védi a vevőt, csak a termék-sorozat vizsgálata során várható eredményről ad tájékoztatást. Az AQL mögött álló filozófia bemutatása és értelmezése a Német Minőségügyi Társaság (Deutsche Gesellschaft für Qualität) kiadványában (DGQ, 1990) található meg.

A vizsgálati terv lépései az 1.6.1.*3. ábrán* láthatók.



1.6.1.**3. ábra:** Példa a DIN 40080:1979 szabvány szerinti vizsgálati terv folyamatábrájára (*Rinne* et al., 1995)

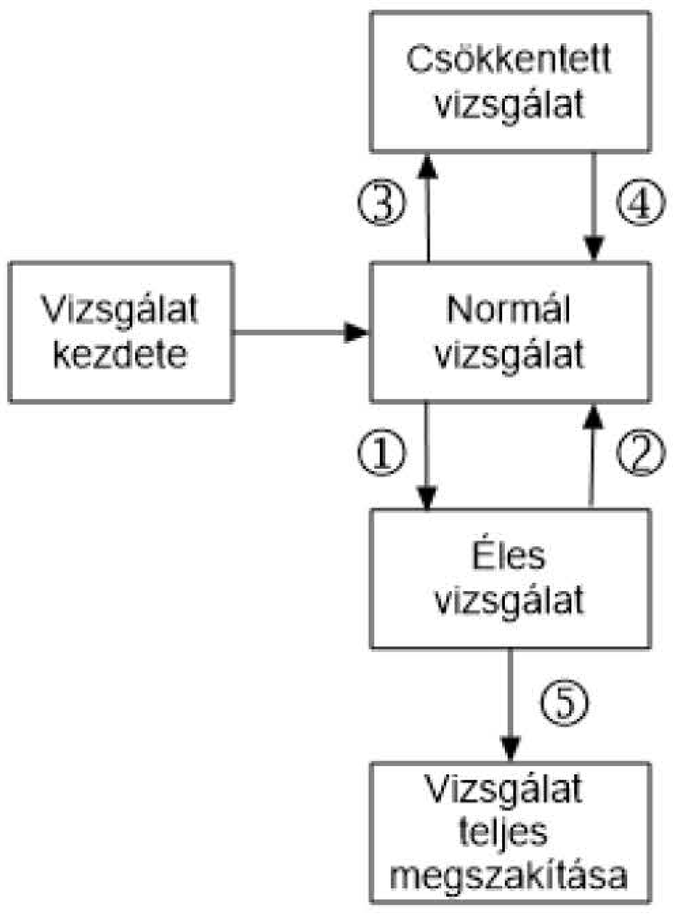
Az 1.6.1.*3. ábrán* a szaggatott vonal jelzi a DIN 40080:1979 szabvány szerinti vizsgálati terveknek az élességváltás lehetőségében rejlő dinamikus jellegét. Minden vizsgálati betűjel és minden vizsgálati fokozat esetén lehetőség van a legutóbb vizsgált tétel vizsgálati élességének megváltoztatására.

A vizsgálati élességváltásra ugrás feltételeit az 1.6.1.*4. ábra* tartalmazza. A tétel vizsgálatát – egyéb megállapodás hiányában – normál vizsgálattal szokás kezdeni. Az ① feltétel szerint a normál vizsgálatról az éles vizsgálatra kell váltani, majd a ② feltétel szerint vissza kell térni a normál vizsgálatra. Csökkentett vizsgálat a gyártó és a vevő megállapodása esetén végezhető; adott esetben a ③ feltételt kell alkalmazni, és a ④ feltétel mellett kell a normál vizsgálatra visszatérni. Az éles vizsgálatot az ⑤ feltétel szerint teljesen meg kell szakítani, ha a vizsgálati eredmény nagyon kedvezőtlen.

Az általában használt II. általános vizsgálati szinten a betűjel és a tételelemszám kapcsolata egyértelmű (lásd az 1.6.1.*1. táblázatot*), ezért a DIN 40080:1979 szabványban egyszerűbb, a II. vizsgálati szinten betűjel nélkül használható táblázatokat is készítettek a normál, éles és csökkentett (redukált) vizsgálat esetére.

Az 1.6.1.*4. táblázat* egy ilyen, csak a II. vizsgálati szinten végzett normál élességű, egylépcsős (egyszeres, egyfokozatú) vizsgálathoz alkalmazható *egyszerűsített táblázat*, amelyben a tételelemszámhoz (N) és az átvételi hibaszinthez (AQL-érték) tartozó mintaelemszám (n) és a minta hibás elemeinek megengedett száma ($c = Ac = k_{\text{megengedett}}$) található. A táblázatban látni, hogy kis tételelemszámok és kis AQL-értékek esetén teljes, valamennyi N tételelemre kiterjedő vizsgálatot kell végezni ($n = N$).

Megjegyezzük, hogy *Rinne* et al. (1995) könyve a kétszeres vizsgálatra is tartalmaz egyszerűsített táblázatot.



①: 5 egymást követő tételből 2 tételt elutasítanak

②: 5 egymást követő tételt elfogadnak

③: 10 egymást követő tételt – további feltételek mellett – elfogadnak

④: 1 tételt elutasítanak (vagy más feltételek)

⑤: 10 egymást követő tételt elutasítanak

1.6.1.**4. ábra:** Az élességváltás feltételei a DIN 40080:1979 szabvány szerint (*Rinne* et al., 1995)

A tétel egységeiben különböző típusú hibák fordulhatnak elő. A DIN 40080:1979 szabvány megkülönbözteti a személyi sérülést okozó súlyos hibákat, a jelentős anyagi kárt okozó főhibákat és a termék rendeltetésszerű használatát jelentősen vagy mérsékelten rontó mellékhibákat.

Súlyos hiba esetén részvizsgálatot végezni nem szabad. A másik két hibatípus esetében, ha mindegyik egységnél egyidejűleg fordulnak elő, különbözőképp járhatunk el. Az egyik lehetőség az egyes hibatípusok külön-külön történő ellenőrzése, amely esetben a tételt akkor kell elutasítani, ha legalább egy hibatípus tekintetében nem felel meg az elfogadási feltételeknek. A másik lehetőség a fő- és mellékhibák összevonása és egy összesített AQL-érték megadása, aminek akkor van értelme, ha a hibák egymástól függetlenek (*Rinne* et al., 1995).

1.6.1.**4. táblázat:** A mintaelemek száma (n) és a hibás elemek megengedett száma (átvételi szám, $c = Ac = k_{megengedett}$) a mintában egylépcsős (egyszeres, egyfokozatú), a II. vizsgálati szinten végzett normál élességű vizsgálat esetén, az AQL-érték függvényében a DIN 40080:1979 szabvány szerint (*Rinne* et al., 1995)

Tétel-elemszám *N*	AQL-érték, %											
	0,10		0,15		0,25		0,40		0,65		1,00	
	n	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*
2 – 8	N	0	N	0	N	0	N	0	N	0	N	0
9 – 15	N	0	N	0	N	0	N	0	N	0	N 13	0 0
16 – 25	N	0	N	0	N	0	N	0	N 20	0 0	13	0
26 – 50	N	0	N	0	N	0	N 32	0 0	20	0	13	0
51 – 90	N	0	N 80	0 0	50	0	32	0	20	0	13	0
91 – 150	N 125	0 0	80	0	50	0	32	0	20	0	13	0
151 – 280	125	0	80	0	50	0	32	0	20	0	50	1
281 – 500	125	0	80	0	50	0	32	0	80	1	50	1
501 – 1200	125	0	80	0	50	0	125	1	80	1	80	2
1201 – 3200	125	0	80	0	200	1	125	1	125	2	125	3
3201 – 10000	125	0	315	1	200	1	200	2	200	3	200	5
10001 – 35000	500	1	315	1	315	2	315	3	315	5	315	7
35001 – 150000	500	1	500	2	500	3	500	5	500	7	500	10
150001 – 500000	800	2	800	3	800	5	800	7	800	10	800	14
> 500000	1250	3	1250	5	1250	7	1250	10	1250	14	1250	21

Az 1.6.1.*4. táblázat* folytatódik

Az 1.6.1.*4. táblázat* folytatása

Tételelemszám *N*	AQL-érték, %											
	1,5		2,5		4,0		6,5		10		15	
	n	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*
2 – 8	N	0	N	0	N	0	N	0	N	0	N	0
			5	0	3	0	2	0	5	1	3	1
9 – 15	8	0	5	0	3	0	2	0	5	1	3	1
16 – 25	8	0	5	0	3	0	8	1	5	1	5	2
26 – 50	8	0	5	0	13	1	8	1	8	2	8	3
51 – 90	8	0	20	1	13	1	13	2	13	3	13	5
91 – 150	32	1	20	1	20	2	20	3	20	5	20	7
151 – 280	32	1	32	2	32	3	32	5	32	7	32	10
281 – 500	50	2	50	3	50	5	50	7	50	10	50	14
501 – 1200	80	3	80	5	80	7	80	10	80	14	80	21
1201 – 3200	125	5	125	7	125	10	125	14	125	21	80	21
3201 – 10000	200	7	200	10	200	14	200	21	125	21	80	21
10001 – 35000	315	10	315	14	315	21	200	21	125	21	80	21
35001 – 150000	500	14	500	21	315	21	200	21	125	21	80	21
150001 – 500000	800	21	800	21	315	21	200	21	125	21	80	21
> 500000	800	21	800	21	315	21	200	21	125	21	80	21

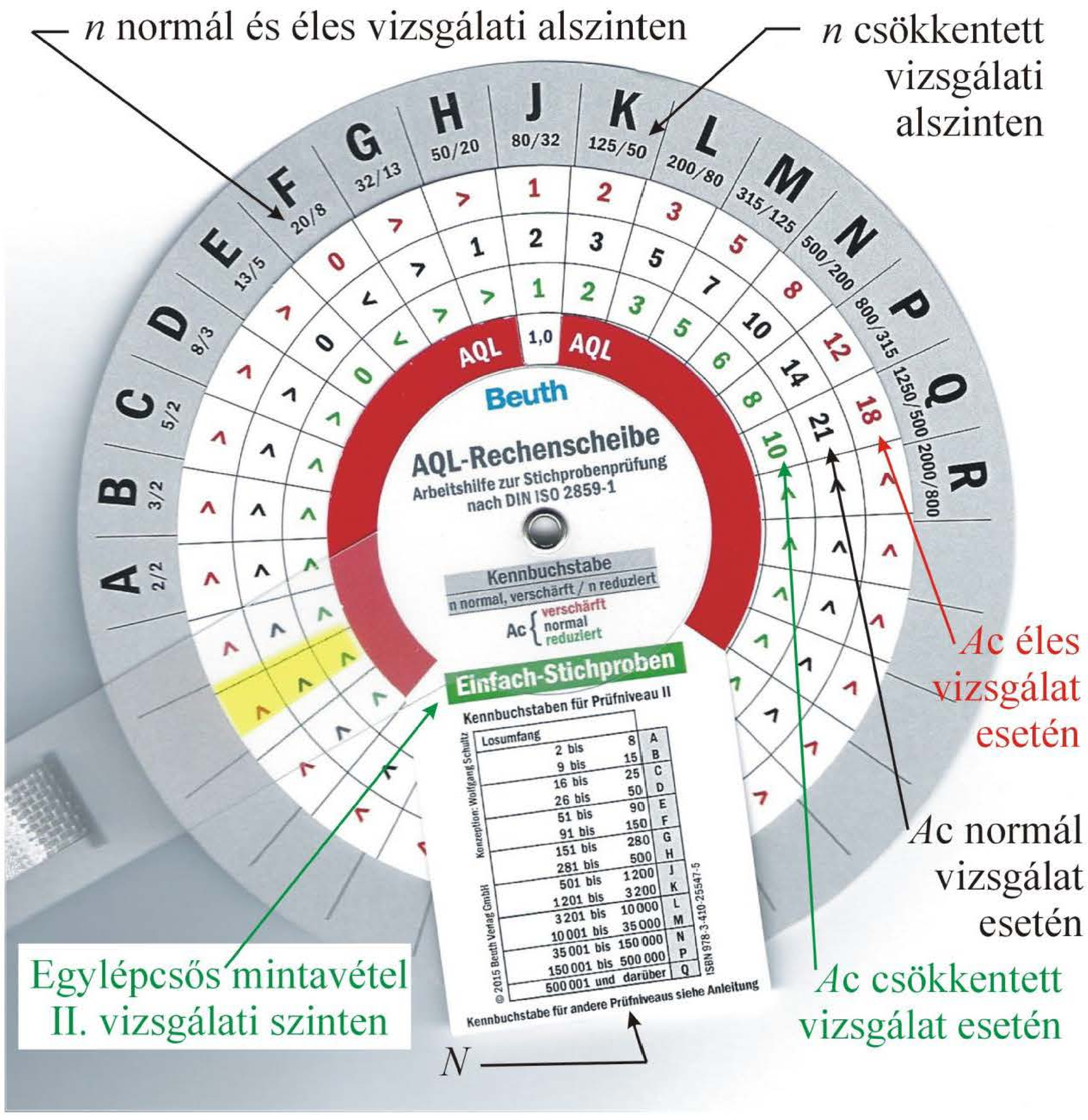
E táblázat megegyezik az MSZ ISO 2859-1:2008 szabvány 2-A táblázatával.

Az MSZ EN 206:2013+A1:2017, illetve MSZ 4798:2016 szabvány 24. táblázatát (1.6.1.*5. táblázat*) az 1.6.1.*4. táblázatnak*, illetve az MSZ ISO 2859-1:2008 szabvány 2-A táblázatának AQL = 4,0% oszlopa alapján készítették.

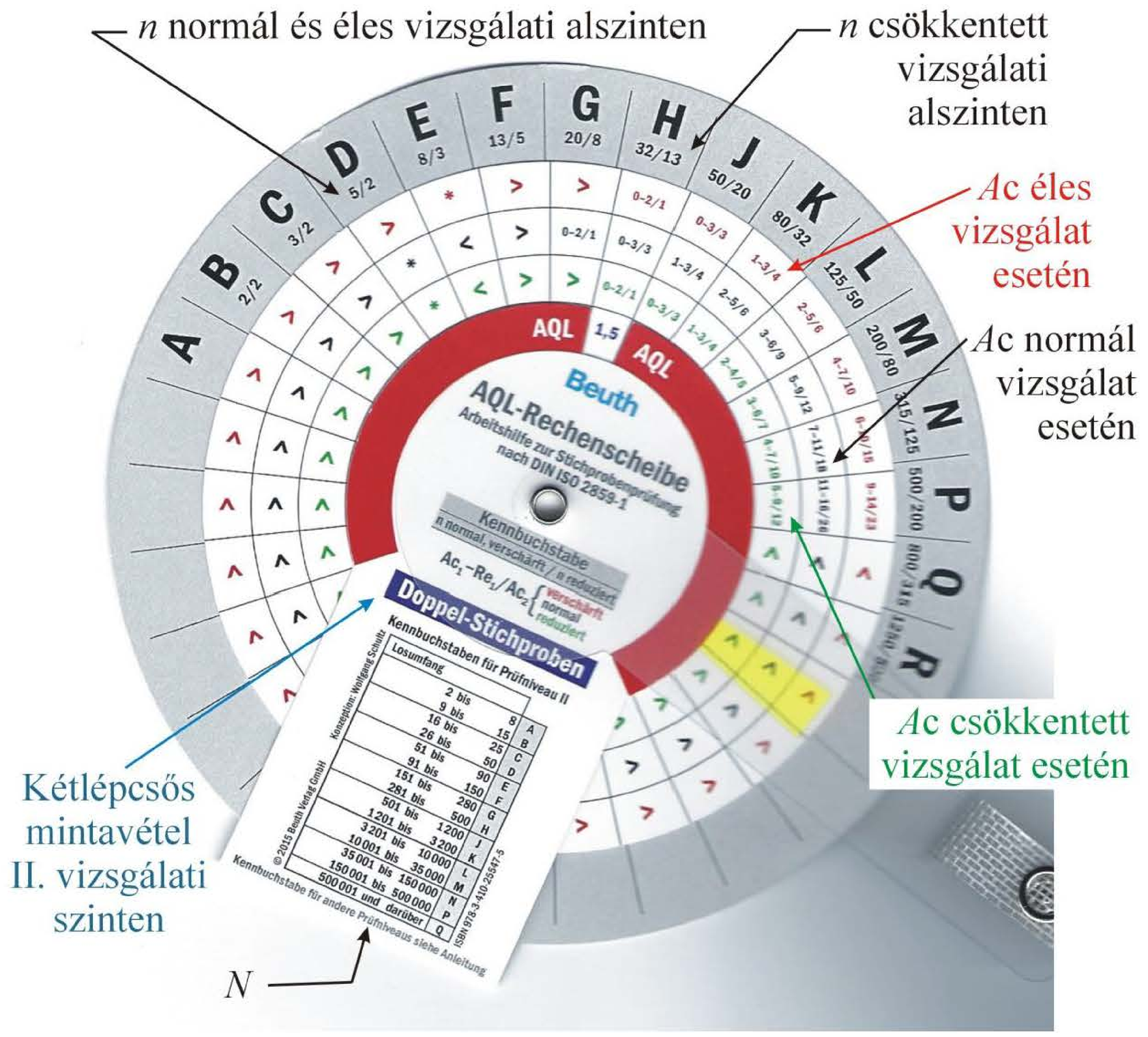
1.6.1.***5. táblázat*:** Az MSZ 4798:2016 szabvány 24. táblázata a friss beton egyes tulajdonságok szerinti megfelelősége vizsgálati mintáinak átvételi számáról

A vizsgálati eredmények száma, azaz	Átvételi szám, azaz	A vizsgálati eredmények száma, azaz	Átvételi szám, azaz
a mintaelemszám n	a megengedett hibás elemek száma a mintában $c = Ac = k_{megengedett}$	a mintaelemszám n	a megengedett hibás elemek száma a mintában $c = Ac = k_{megengedett}$
1 – 12	0	50 – 64	5
13 – 19	1	65 – 79	6
20 – 31	2	80 – 94	7
32 - 39	3	95 - 100	8
40 – 49	4	100 <	Lásd az MSZ ISO 2859-1:2008 szabvány 2-A táblázatát

A DIN ISO 2859-1:2014 szabvány szerinti egylépcsős (egyszeres, egyfokozatú) és kétlépcsős (kétszeres, kétfokozatú) AQL minőségvizsgálati terv elkészítését megkönnyíti a *Schultz*-féle (2015) AQL-tervezőkorong (1.6.1.*5. és* 1.6.6.*6 ábra*).



1.6.1.**5. ábra:** A *Schultz*-féle (2015) AQL-tervezőkorong első oldala egylépcsős (egyszeres, egyfokozatú) mintavételi eljáráshoz



1.6.1.**6. ábra:** A *Schultz*-féle (2015) AQL-tervezőkorong hátoldala kétlépcsős (kétszeres, kétfokozatú) mintavételi eljáráshoz

A *Schultz*-féle (2015) AQL-tervezőkorong három (szürke, fehér, piros) tárcsából áll, amelyek közül a külső (szürke) és a belső (piros) rögzített, a középső (fehér) pedig elforgatható. A tárcsákon lévő skálák értelmezése a következő:

- a külső, szürke tárcsa betűjelei a II. vizsgálati szinthez tartozó – a belső tárcsához csatolt táblázatból olvasható – *N* tételelemszámok tartományát fedik (1.6.1.*1. táblázat*);
- a külső, szürke tárcsa második (belső) sorának első számjelei (megelőzik a / jelet) a mintaelemszámot jelentik normál és éles

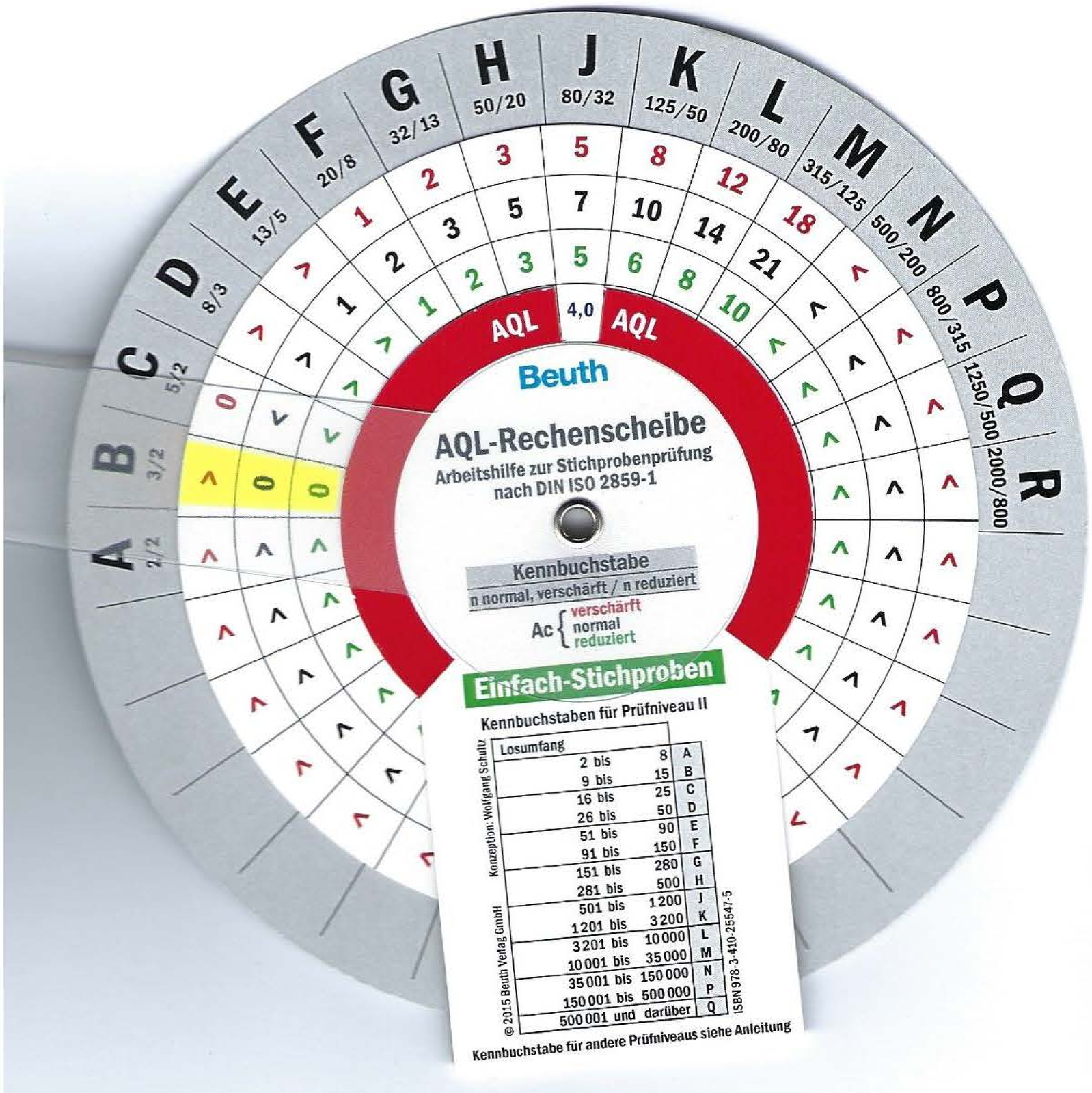
vizsgálati alszinten, második számjelei (a / jelet követik) a mintaelemszámot jelentik csökkentett (redukált) vizsgálati alszinten (1.6.1.*2. táblázat*, 1.6.1.*3.* és 1.6.1.*4. ábra*);

- a középső, fehér tárcsán található számok az átvételi számok, azaz az $Ac = c = k_{\text{megengedett}}$ megengedett hibás elemek száma a mintában:
  - az első (külső) sorban lévő, piros színű számok az átvételi számok éles vizsgálat,
  - a második (középső) sorban lévő, fekete színű számok az átvételi számok normál vizsgálat (1.6.1.*4. táblázat*),
  - a harmadik (belső) sorban lévő, zöld színű számok az átvételi számok csökkentett (redukált) vizsgálat esetén.

  A visszautasítási szám = $Ac + 1$.
- a belső, piros tárcsa alatt az AQL-értékek találhatók (1.6.1.*3.* és 1.6.1.*4. táblázat*).

Az AQL minőségvizsgálati terv elkészítése során első lépésként a középső, fehér színű tárcsát úgy forgatjuk, hogy a belső, piros színű, rögzített tárcsa ablakába a teljesítendő AQL-érték essék. Ezt követően a sárga csíkot tartalmazó nyelvet a tételelemszámnak megfelelő betűjelre forgatjuk, és a középső, fehér színű tárcsa második, középső sorában megkapjuk a keresett, a sárga csíkkal kijelölt Ac átvételi számot.

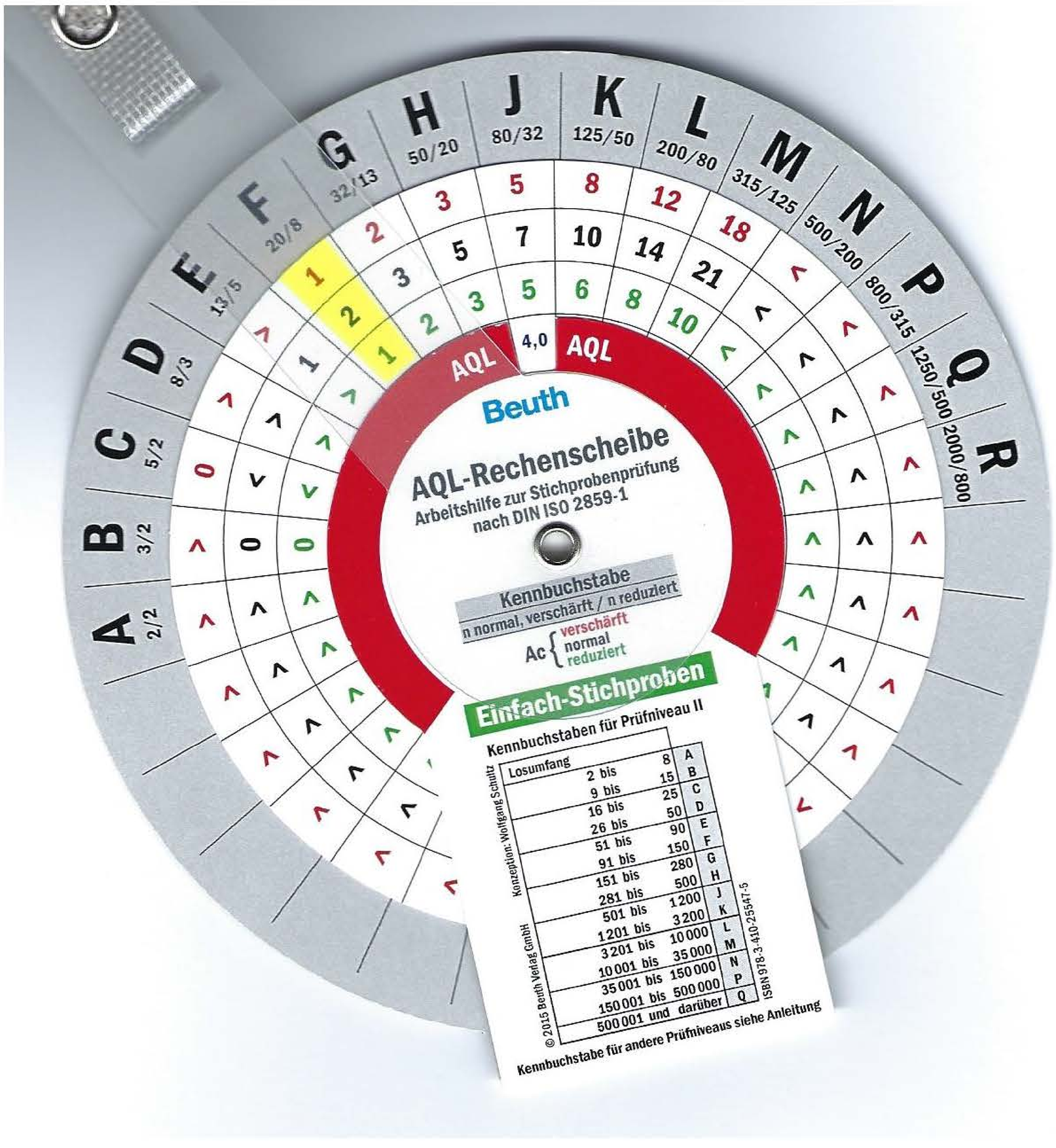
Az 1.6.1.*7. ábra* az AQL-tervezőkorong olyan állását mutatja, amelyben egylépcsős, II. szintű, normál vizsgálat esetén az átvételi hibaszint értéke az MSZ EN 206:2013+A1:2017, illetve MSZ 4798:2016 szabvány 24. táblázata szerinti AQL = 4%, az N tételelemszám 9 és 15 közé esik (1.6.1.*1. táblázat*), a betűjel B, a mintaelemszám $n = 3$ (1.6.1.*2. táblázat*), és az átvételi szám $Ac = c = k_{\text{megengedett}} = 0$ (1.6.1.*4. táblázat*).



1.6.1.**7. ábra:** A *Schultz*-féle (2015) AQL-tervezőkorong az MSZ EN 206:2013+A1:2017, illetve MSZ 4798:2016 szabvány 24. táblázata szerinti egylépcsős vizsgálati, AQL = 4% és *B* betűjelű állásban

Az 1.6.1.*8. ábra* az AQL-tervezőkorong olyan állását mutatja, amelyben egylépcsős, II. szintű, normál vizsgálat esetén az átvételi hibaszint értéke az MSZ EN 206:2013+A1:2017, illetve MSZ 4798:2016 szabvány 24. táblázata szerinti AQL = 4%, az *N* tételelemszám 91 és 150 közé esik (1.6.1.*1. táblázat*), a betűjel *F*, a mintaelemszám $n = 20$ (1.6.1.*2. táblázat*), és az átvételi szám $Ac = c = k_{megengedett} = 2$ (1.6.1.*4. táblázat*).

Megjegyzendő, hogy az MSZ EN 206:2013+A1:2017, illetve MSZ 4798:2016 szabványban nem említik, hogy az *A*c = *c* átvételi számok egylépcsős, II. szintű, normál vizsgálathoz tartoznak és az *N* tételelemszámok függvényét képezik.



1.6.1.**8. ábra:** A *Schultz*-féle (2015) AQL-tervezőkorong az MSZ EN 206:2013+A1:2017, illetve MSZ 4798:2016 szabvány 24. táblázata szerinti egylépcsős vizsgálati, AQL = 4% és *F* betűjelű állásban

1.6.1.5. LQ Visszautasítási hibaszint, hibakorlát

(MSZ ISO 2859-2:2020, MSZ 247-1:1977 visszavont)

Angolul: LQ Limiting Quality, németül: Schlechtgrenze

A visszautasítási hibaszinttel (LQ) jelzett mintavételi tervek az MSZ ISO 2859-2:2020 szabványban találhatók olyan esetekre, amelyekben az MSZ ISO 2859-1:2008 szabvány áttérési szabályai nem alkalmazhatók, például a tételek egyediek.

Az MSZ ISO 2859-2:2020 szabványban a nulla átvételi számú (a megengedett hibás, azaz nem megfelelő elemek száma, $c = Ac = k_{megengedett} = 0$) tervek hipergeometrikus eloszlást közelítő binomiális eloszláson, a nem nulla átvételi számú (a megengedett hibás, azaz nem megfelelő elemek száma, $c = Ac = k_{megengedett}$ c $\neq 0$) tervek a binomiális eloszlást közelítő *Poisson*-eloszláson alapulnak. A binomiális eloszláson alapuló mintavételi terveket nulla átvételi számú egyedi tételek, a *Poisson*-eloszláson alapuló mintavételi terveket folyamatosan gyártott tételek minőségellenőrzése során alkalmazzuk.

A visszavont MSZ ISO 2859-2:2007 szabványban valamennyi visszautasítási hibaszintű egylépcsős (egyszeres, egyfokozatú) mintavételi tervhez tartozó OC-görbét is bemutatták, az MSZ ISO 2859-2:2020 szabványban pedig a nulla átvételi számú mintavételi tervekhez tartozó, hipergeometrikus hátterű OC-görbék adatait közölték.

Az egyes mintavételi tervek statisztikai tulajdonságait az MSZ ISO 2859-2:2020 szabvány A mellékletében, a statisztikai mutatók számításmódját a szabvány B mellékletében tárgyalják. A megbízhatósági intervallumok technikai hátteréről ugyanennek a szabványnak a C mellékletében található rövid tájékoztatás, amely szerint a nem megfelelő elemek konfidencia-intervallumait a megfelelő binomiális eloszlással vagy *Poisson*-eloszlással kell kiszámítani.

Az MSZ ISO 2859-2:2020 szabvány táblázataiban szereplő LQ-értékek sora az előzmény-szabványban (MSZ ISO 2859-2:2007) szereplő LQ-értékek soránál bővebb, ugyanis az előnyben részesített LQ-értékek a korábbi legkisebb 0,5%-nál kisebb értékeket is felvesznek: 0,05%,

0,08%, 0,125%, 0,2%, 0,315%, 0,5%, 0,8%, 1,25%, 2%, 3,15%, 5%. 8%, 12,5%, 20% és 31,5%, mint azt az 1.6.1.*6. táblázatban* látni lehet.

1.6.1.***6. táblázat*:** A mintaelemek száma (n) és a hibás elemek megengedett száma (c = Ac = $k_{megengedett}$) a mintában egylépcsős (egyszeres, egyfokozatú), a II. vizsgálati szinten végzett normál élességű vizsgálat esetén, az LQ-érték függvényében az MSZ ISO 2859-2:2020 szabvány szerint

Tételelemszám N	LQ-érték, %									
	0,05		0,08		0,125		0,2		0,315	
	n	c, Ac	n	c, Ac	n	c, Ac	n	c, Ac	n	c, Ac
16 – 25	N	0	N	0	N	0	N	0	N	0
26 – 50	N	0	N	0	N	0	N	0	N	0
51 – 90	N	0	N	0	N	0	N	0	N	0
91 – 150	N	0	N	0	N	0	N	0	N	0
151 – 280	N	0	N	0	N	0	N	0	N	0
							252	0	252	0
281 – 500	N	0	N	0	N	0	450	0	287	0
					450	0				
501 – 1200	N	0	N	0	720	0	684	0	510	0
	1080	0	1080	0						
1201 – 3200	1800	0	1710	0	1400	0	956	0	653	0
3201 – 10000	3690	0	2501	0	1676	0	1087	0	699	0
10001 – 35000	4306	0	2762	0	1793	0	1132	0	717	0
35001 – 150000	4535	0	2850	0	1830	0	1146	0	800	0
150001 – 500000	4583	0	2869	0	1838	0	1250	0	1250	1
> 500000	4601	0	2876	0	2000	0	2000	1	1250	1

Az 1.6.1.*6. táblázat* folytatódik

Az 1.6.1.*6. táblázat* folytatása

Tételelemszám *N*	LQ-érték, %									
	0,5		0,8		1,25		02		3,15	
	n	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*
16 – 25	N	0	N	0	N	0	N	0	N	0
26 – 50	N	0	N	0	N	0	N	0	N	0
51 – 90	N	0	N	0	N	0	50	0	44	0
91 – 150	N	0	N	0	90	0	80	0	55	0
151 – 280	N	0	170	0	130	0	95	0	65	0
	200	0								
281 – 500	280	0	220	0	155	0	105	0	80	0
501 – 1200	380	0	255	0	170	0	125	0	125	1
1201 – 3200	430	0	280	0	200	0	200	1	125	1
3201 – 10000	450	0	315	0	315	1	200	1	200	3
10001 – 35000	500	0	500	1	315	1	315	3	315	5
35001 – 150000	800	1	500	1	500	3	500	5	500	10
150001 – 500000	800	1	800	3	800	5	800	10	800	18
> 500000	1250	3	1250	5	1250	5	1250	10	1250	18

Az 1.6.1.*6. táblázat* folytatódik

Az 1.6.1.*6. táblázat* folytatása

Tételelemszám *N*	LQ-érték, %									
	5		8		12,5		20		31,5	
	n	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*	*n*	*c*, *Ac*
16 – 25	25	0	17	0	13	0	9	0	6	0
26 – 50	28	0	22	0	15	0	10	0	6	0
51 – 90	34	0	24	0	16	0	10	0	8	0
91 – 150	38	0	26	0	18	0	13	0	13	1
151 – 280	42	0	28	0	20	0	20	1	13	1
281 – 500	50	0	32	0	32	1	20	1	20	3
501 – 1200	80	1	50	1	32	1	32	3	32	5
1201 – 3200	125	3	80	3	50	3	50	5	50	10
3201 – 10000	200	5	125	5	80	5	80	10	80	18
10001 – 35000	315	10	200	10	125	10	125	18	80	18
35001 – 150000	500	18	315	18	200	18	125	18	80	18
150001 – 500000	500	18	315	18	200	18	125	18	80	18
> 500000	800	18	500	18	315	18	200	18	125	18

Összegezve: E fejezetben a sorozatgyártású termékek egylépcsős (egyszeres, egyfokozatú), II. vizsgálati szinten végzett normál élességű minősítéses vizsgálattal végzett mintavételes minőségellenőrzésének hibaszint (elfogadási határ) fogalmaival foglalkoztunk az ISO 2859 szabványsorozat szerinti matematikai statisztikai értelmezés alapján.

A mintavételes minőségellenőrzés akkor éri el a célját, ha a vizsgálati minta mérete (*n* mintaelemszám) a vizsgálati eredmény, illetve az abból a tétel minősítésére levont következtetés megbízhatósága – esetünkben az anyag vagy szerkezet tartósságának megítélése – szempontjából elengedő nagy, ugyanakkor a vizsgálati költségekre tekintettel a lehető legkisebb.

Ha előírjuk valamely (például AOQ, AOQL, AQL, LQ) minőségellenőrzési hibaszint értékét, akkor a matematikai statisztika ISO 2859 szabványsorozat szerinti módszereivel a tétel alulmaradási hányadára (p = M/N) vonatkozólag, a tételelemszám (*N*) függvényében meghatározható a legkedvezőbb (optimális) mintaelemszám (*n*) és a minta hibás elemeinek megengedett száma ($c = Ac = k_{\text{megengedett}}$).

A célirányos, azaz megbízható és gazdaságos mintavételi terv elkészítésének előfeltétele

- a hipergeometrikus eloszlásból származtatott, $L(p \mid N, n, c) = Hi(c \mid N, M, n)$ alakú, vagy
- a binomiális eloszlásból származtatott, $L(p \mid n, c) = Bi(c \mid p, n)$ alakú, vagy
- a *Poisson*-eloszlásból származtatott, $L(\lambda \mid n, c) = Po(c \mid n \times \lambda)$ alakú,

a fenti változóknak megfelelő OC-görbének, illetve az OC-görbe függvényének az ismerete.

Az OC-görbe és az OC-görbe függvényének sajátságaival az 1.6.2. fejezetben foglalkozunk.

Budapest, 2020. szeptember 18.

Frissítve: 2022. április 30.

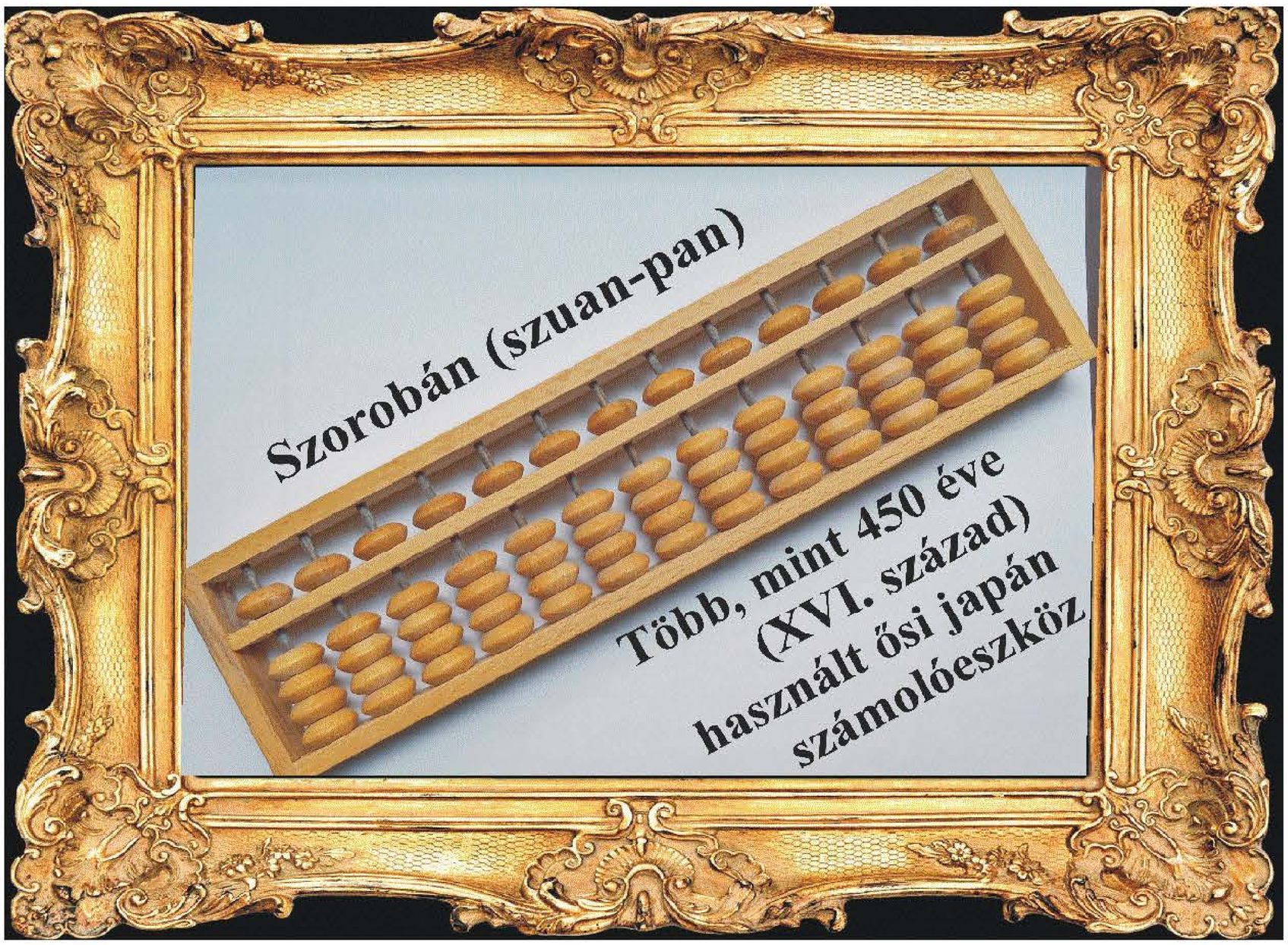
Ugrás a

KÖVETKEZŐ FEJEZET | TARTALOMJEGYZÉK

a hivatkozott

JOGSZABÁLYOK | SZABVÁNYOK, ELŐÍRÁSOK | IRODALOM

fejezetének elejére



A számológépet Kínában mintegy 3000 év óta ismerik. *Csu-pan**, azaz golyóstálca a neve, mert a számokat, síneken tologatható golyókkal ábrázolja, ugyanúgy, mint nálunk az iskolásgyerekek számológép-tanszere.

A *csu-pant** sok ázsiai országban mindmáig általánosan használják. Japánban ***szorobán*** néven terjedt el, mérnökök, bankpénztárosok asztalán is megtalálható. Az amerikai (1945. szeptember - 1952. április) megszállók mosolyogtak is ezen és versenyt rendeztek: *Kijosi Macuzaki* szorobánon, *John Wood* pedig modern elektromechanikus számológépen végezte el ugyanazt a számítást. Nem tudjuk, mi volt az egyenlőtlen mérkőzés célja. Mindenesetre visszafelé sült el a dolog: a verseny minden feladatát *Kijosi Macuzaki* végezte el gyorsabban.

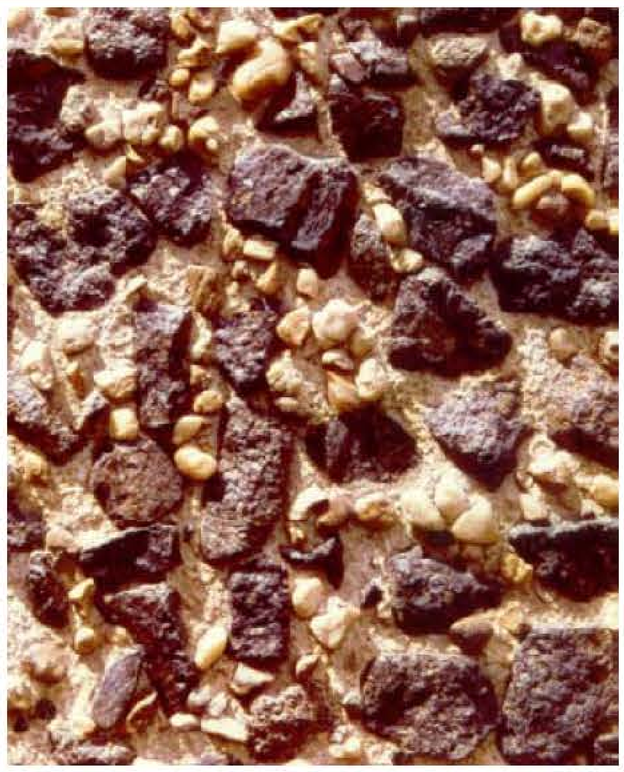
A Japánban tartott számítóverseny meglepő eredményének az a magyarázata, hogy a számolás lassabban megy ugyan a szorobánon, mint a modern számológépen, de a tárolás nem igényel külön segédeszközt (például papírt), hanem magának a gépnek a golyó sorain történhet. Ennek következtében a számítás (számolások + átírások) összes időtartam a hasonló nagyságrendű a kétféle eszközön. Az olyan kivételes tehetségű ember, mint *Kijosi Macuzaki*, a maga javára billentheti a mérleget.

Részletek *Ambrózy Andrásné*: „A számológéptől a számítógépig" című cikkből, amely a Műszaki Élet XV. évfolyama 1. számának 11. oldalán megjelent meg 1960. január 7-én.

**Vajda J. – Vajdáné Bári M.*: „Szorobánnal a matematika órákon", Makó, 1995. müve szerint a *szorobán* a kínai *szuan-pan* hangzás utáni átvétele.

Szemmegoszlási jellemzők harmóniája, avagy grafoanalitikus számításmódja

Megjegyzés: Ennek a témának a kidolgozása idején (1970-es évek elején) a mai *„szemmegoszlás”* kifejezés szinonimájaként használatos volt a *„szemeloszlás”* kifejezés is, ezért használata ebben a dolgozatban visszatér.



E noteszlap a fáradtságosabb olvasmányok csoportjába sorolható, amelyet elszántabb Internetezőknek ajánlunk.

Ezt azonban jó lelkiismerettel tesszük, mert a dolgozat - a hasznosnak vélt gondolatokon túl - reményeink szerint felvillantja a többek által száraz, leíró tudományágnak tartott építőanyagtan és betontechnológia fontos fejezetének, a granulometriának, vagy leszűkítve, a szemszerkezettannak a logikán alapuló szépségét is.

A harmónia szépség, melynek birtoklásáért meg kell küzdeni. Tessék jókedvvel megkísérelni, nem nehéz, csak idő és türelem igényes elfoglaltság.

Bevezetés

Kutatási, fejlesztési és igényesebb gyakorlati kompozit-tervezési feladatok megoldása során, főképpen a **betonok**, ritkábban a habarcsok és az aszfaltok **adalékanyagául**, esetleg töltőanyagául szolgáló **homokok, kavicsok**, zúzottkövek, kőlisztek, kőporok **szemeloszlását** számszerűen a várhatóértékkel, a szórásnégyzettel, a relatív szórásnégyzettel, az átlagos szemnagysággal, a logaritmikus finomsági modulussal, és a térfogati fajlagos felülettel jellemezzük vagy jellemezhetjük [1]. Ezek kiszámítása mindig a szitavizsgálat, vagy szedimentálás eredménye alapján, de kétféle módon, grafikusan és analitikusan történhet aszerint, hogy a szemeloszlás-jellemzőkkel arányos koordinátarendszerbeli területek nagyságát, vagy a szemeloszlás-jellemzőket kifejező momentumokat határozzuk meg. A terület-meghatározást lényegében méréssel, a momentum-meghatározást kizárólag számítással végezzük.

Mindkét eljárásnak differenciálos és differenciás változata van.

Differenciál-számítás esetén a grafikus módszerhez a vizsgálati eredményekből szerkesztett szemeloszlásgörbe ismeretére, az analitikus módszerhez a vizsgálati eredményekből számított regressziós szemeloszlásfüggvény ismeretére van szükség (például a *Gates, Gaudin, Rosin-Rammler-Sperling, Bennett, Schuhmann, Kolmogorov-Rényi, Fáy-Zselev, Fuller* elméletek). A szemeloszlás-jellemzők számításának elméleti alapját a grafikus és analitikus eljárás differenciál módszerére épülő meggondolások képezik.

Differencia-számításnál mind a grafikus, mind az analitikus módszer esetén a szemhalmazt idealizált szemeloszlású, és a vizsgálati szemnagyságok által meghatározott részhalmazok összegeként fogjuk fel. A differencia módszer a gyakorlat eszköze, grafikus formában elsősorban a mindennapi építőmunkában (például az MSZ

4713/3:1977), analitikus formában inkább csak a tudományos munkában alkalmazzuk. Ez a kettősség az eredmények eltérésében is megmutatkozik, ami egy egységes számítási módszer kidolgozásának szükségességét vetette fel.

A kidolgozott egységes számítási módszer a grafoanalitikus differencia-számítás jegyeit viseli magán. A módszer grafoanalitikus, mert területszámítással momentum meghatározást végzünk, és differencia-számítás, mert a szemeloszlás-jellemzők számításához közvetlenül a szitavizsgálat, vagy szedimentálás eredményeit használjuk fel.

A módszer előnye, hogy alapelve egységes szemléletű, a szitavizsgálathoz tetszőleges lyukbőségű sziták használatát - szedimentálásnál tetszőleges szemnagyságok ülepedésének vizsgálatát - teszi lehetővé, a szemeloszlásgörbe megszerkesztését, vagy a szemeloszlásfüggvény meghatározását szükségtelenné teszi, a koordinátarendszerbeli terület, illetve az azzal arányos hosszúság mérését kiküszöböli. A számítási módszer alkalmazása egyszerű és hasonló alakú képletek megoldásában áll, amelyek könnyen számítógépre is vihetők.

A módszert a következő fejezetekben tárgyaljuk:

- Számítások alapelve
- Várhatóérték vagy lineáris finomsági modulus
- Szórásnégyzet
- Átlagos szemnagyság vagy logaritmikus várhatóérték
- Logaritmikus finomsági modulus
- Térfogati fajlagos felület

A számítási módszert a *BME Ásvány- és Földtani Tanszékén* (ma az Építőanyagok és Mérnökgeológia Tanszék mérnökgeológia tanszéki csoportja) működött szabványosítási bizottság annak idején elfogadta és a *Magyar Szabványügyi Hivatal* 1981. évben szabványosította [2]. (Ennek az egykori nemzeti kő és kavics szabványosítási bizottságnak a munkájáról ide kattintva lehet olvasni.)

IRODALOM

[1] Kausay Tibor: Homokos kavicsok és zúzott adalékanyagok szemeloszlásjellemzőinek analitikus megállapítása. Mélyépítéstudományi Szemle. 25. évf. 1975. 4. szám. 165 -164 p.

[2] MSZ 18288/5:1981 Építési kőanyagok szemszerkezeti és szennyeződési vizsgálata. Szemmegoszlásjellemzők számítása

[3] Kausay Tibor: Beton adalékanyagok szemmegoszlási jellemzőinek számítása grafoanalitikus módon. Vasbetonépítés. VI. évf. 2004. 1. szám. pp. 3-11.

Számítások alapelve

Számítási alapelvként a szemeloszlási jellemzőknek azt a közös tulajdonságát használjuk fel, hogy mindegyikük értéke kifejezhető a megfelelő koordináta-abszcisszatengelyen ábrázolt szemeloszlásgörbe alatti területtel. Ehhez az abszcissza-tengelyek beosztását úgy kell megválasztani, hogy a koordinátarendszer-beli területek a szemeloszlási jellemzőkkel arányosak legyenek, amit a szemeloszlásgörbe eredetileg lineáris abszcisszatengelyének esetenkénti transzformációjával lehet elérni. A lineáris skálabeosztású abszcisszatengely a szemnagyságnak, a transzformált tengely a szemnagyság származékának hordozója.

A. szemnagysággal a várhatóérték egyenes, a szórásnégyzet négyzetes, az átlagos szemnagyság és a logaritmikus finomsági modulus logaritmikus, a térfogati fajlagos felület fordított arányú összefüggésben áll. Ezért a várhatóértéket lineáris, a szórásnégyzetet négyzetes, az átlagos szemnagyságot és a logaritmikus finomsági modulust logaritmikus, a térfogati fajlagos felületet reciprok beosztású abszcisszatengelyre rajzolt szemeloszlásgörbével jelenítjük meg.

A szemeloszlási görbét egyenes szakaszokból összetettnek tekintjük. Az egyenes szakaszok sarokpontjait a vizsgálati szemnagyságok abszcissza, és a vizsgálati szemeloszlások ordináta rendezővonalainak megfelelő metszéspontjai adják meg. Megállapodásunk az abszcisszatengely beosztások mindegyikére érvényes, tehát a valóságtól eltérően abszcisszatengely beosztásonként más-más - de a transzformált abszcisszatengelyre vonatkozóan mindig lineáris - rész-szemhalmaz eloszlásokkal dolgozunk, ami a módszer egyetlen - és szűk részhalmaz-határok esetén elhanyagolható - pontatlansága.

A vizsgálati szemnagyságok a rész-szemhalmazok halmazhatárait szolgáltatják, amelyekhez, illetve amelyek származékához tartozó abszcissza rendezővonalak a szemeloszlásgörbe alatti területet részterületekre osztják. Feladatunk e részterületek nagyságának kiszámítása, összegezése, és a szemeloszlási jellemzőkre vonatkoztatása.

Oldjuk meg a területszámítást először általánosságban, mert a szemeloszlási jellemzők számítása a szemeloszlásgörbe alatti terület általános alakú összefüggésének megoldására vezethető vissza.

Megjegyzés

Dolgozatunkban a $p'_{(\delta)}$ gyakoriságfüggvény és származékai alatt mindig *relatív tömeg-gyakoriságfüggvényt*, a hozzá tartozó $p_{(\delta)}$ eloszlásfüggvény és származékai alatt mindig *relatív tömeg-eloszlásfüggvényt* értünk. Így van ez akkor is, amikor az ordinátatengely beosztása tömeg%.

Az **általános alakú összefüggés** felírásához tekintsük a szemeloszlásgörbét egyenes szakaszokból összetettnek és számítsuk ki a $p_{(\delta)}$ szemeloszlásgörbe alatti $T_{(\delta)}$ területet (*1. egyenlet*).

Jelöljük az *1.-2. ábra* értelmezésében a szemeloszlások értékét *p*-vel, a *d* részhalmaz-határok függvényét δ-val, amely az abszcisszatengely lineáris beosztása esetén *d*-t, négyzetes beosztása esetén d^2-et, logaritmikus beosztása esetén *lgd*-t, reciprok

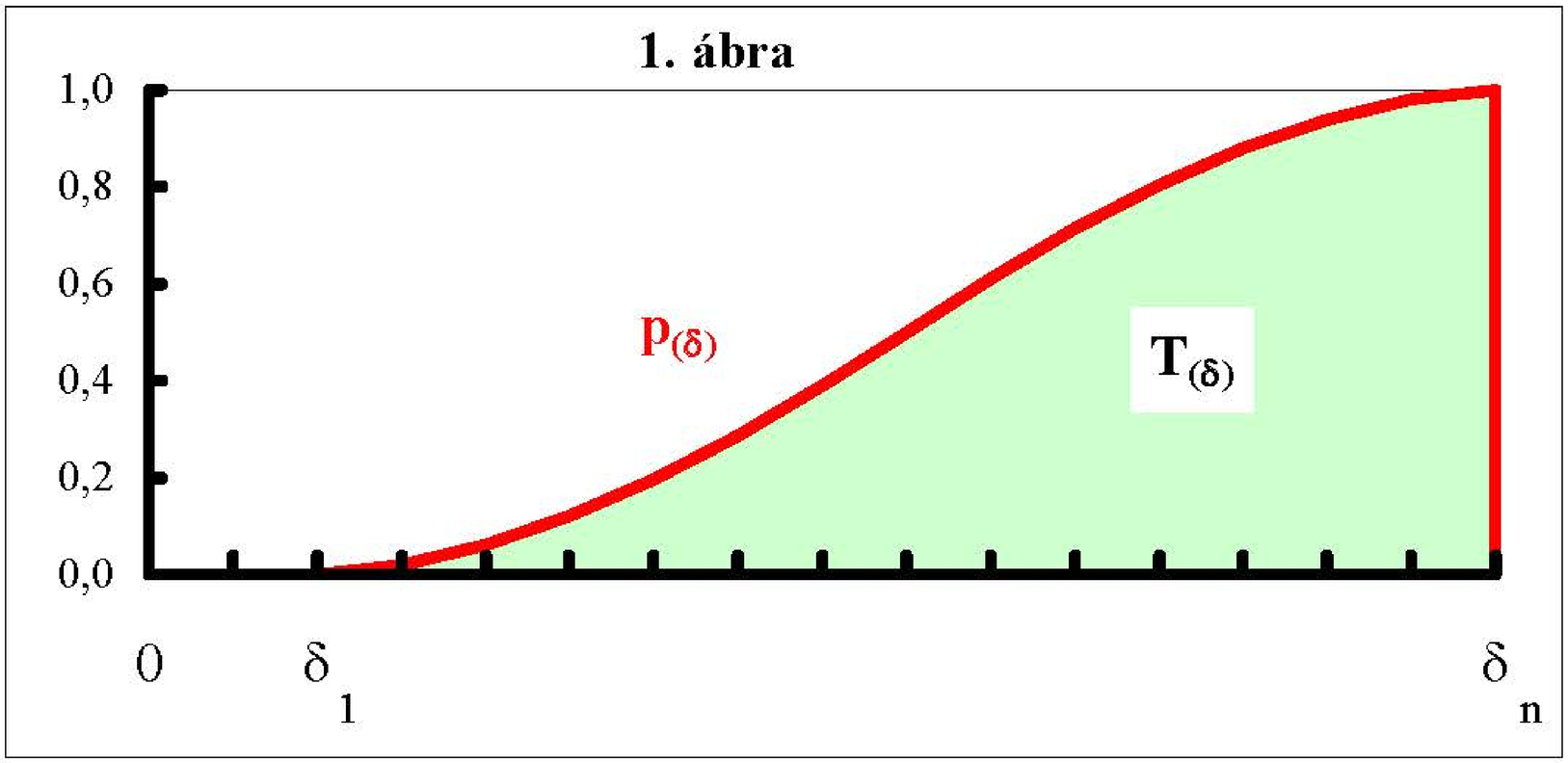
beosztása esetén d^{-1}-t jelent. A d mértékegysége mm. Utaljanak az alsó indexek a részhalmaz-határokra, az *1* az elsőre, az *n* az utolsóra, azaz a két utóbbi a szemhalmaz legkisebb és legnagyobb szemnagyságára.

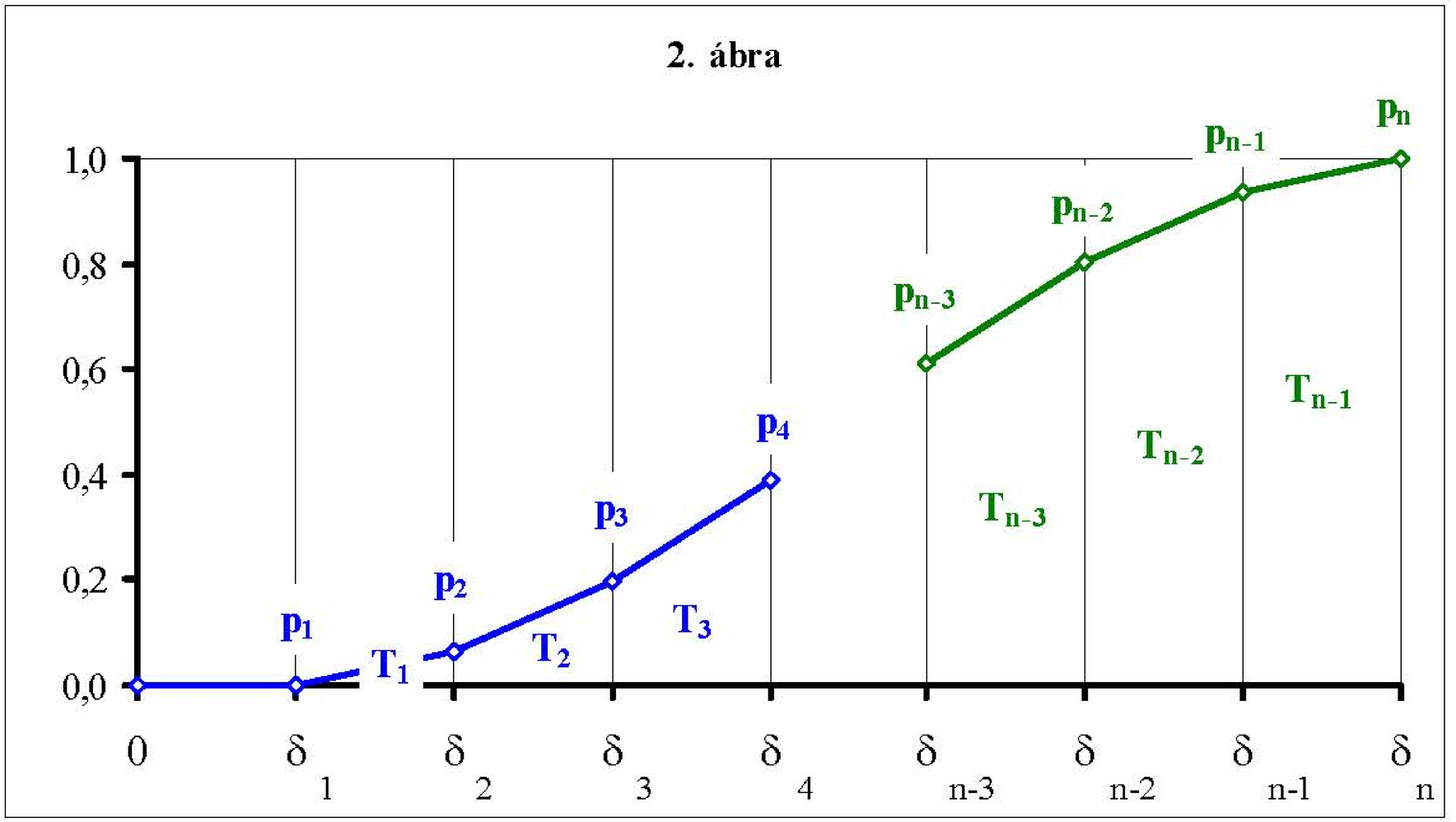
$$T_{(\delta)} = \int_{\delta_1}^{\delta_n} p.d\delta = \Sigma_{i=1}^{n-1} T_i = \frac{1}{100} * \Sigma_{\delta_1}^{\delta_n} \frac{p_i^{\%} + p_{i+1}^{\%}}{2} * (\delta_{i+1} - \delta_i) =$$

$$= \frac{1}{100} * [\frac{p_1^{\%} + p_2^{\%}}{2} * (\delta_2 - \delta_1) + \frac{p_2^{\%} + p_3^{\%}}{2} * (\delta_3 - \delta_2) +$$

$$+ \frac{p_3^{\%} + p_4^{\%}}{2} * (\delta_4 - \delta_3) + \ldots + \frac{p_{n-1}^{\%} + p_n^{\%}}{2} * (\delta_n - \delta_{n-1})] =$$

$$= \frac{1}{200} * [100 * (\delta_n - \delta_{n-1}) + \Sigma_{i=2}^{n-1} p_i^{\%} * (\delta_{i+1} - \delta_{i-1})] \qquad (1)$$





Keressük ezek után a kapcsolatot a megfelelő görbe alatti területek és a különböző szemeloszlási jellemzők között.

A dolgozat következő fejezetéhez

Vissza a

Noteszlapok abc-ben

Noteszlapok tematikusan

tartalomjegyzékhez

Vissza a dolgozat tartalomjegyzékéhez

Várhatóérték vagy lineáris finomsági modulus

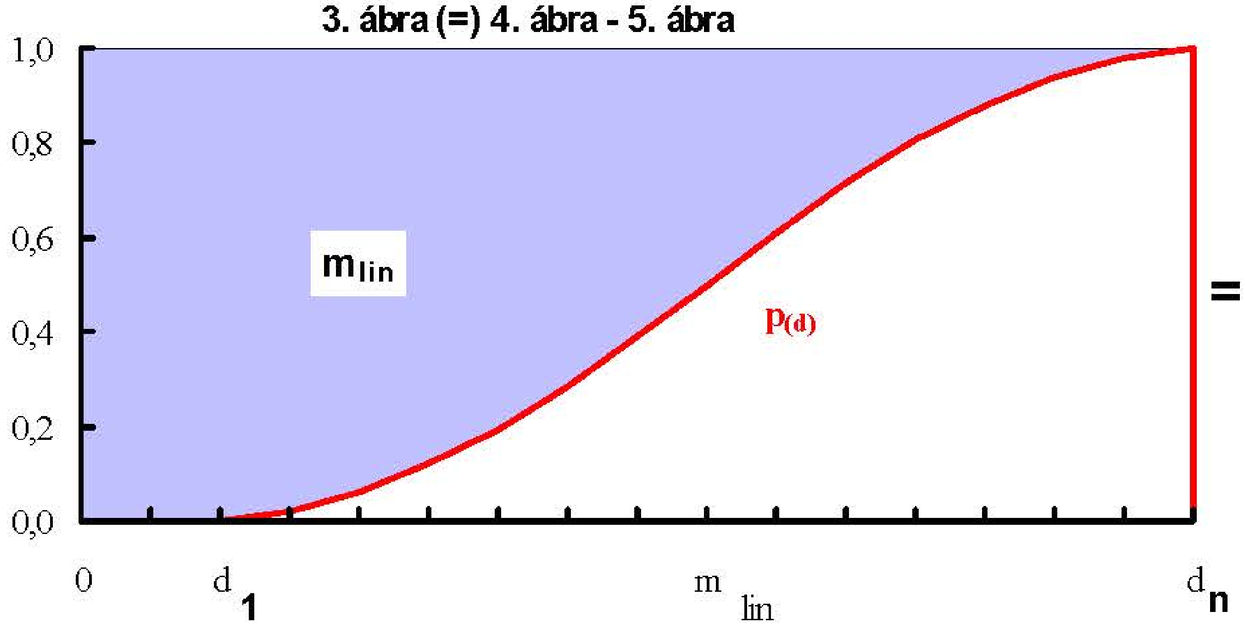
A **várhatóérték,** vagy más néven a lineáris finomsági modulus azonos a **lineáris beosztású abszcisszatengellyel** rendelkező koordinátarendszerben ábrázolt szemeloszlásgörbe *d=0* és d_n határú intervalluma feletti m_{lin} területtel (*2. egyenlet és 3.-5. ábrák*):

$$m_{lin} = v_1 = \Psi_0 = \int_{d_1}^{d_n} d * p'.dd = \int_{0}^{d_n} dd - \int_{d_1}^{d_n} p.dd = d_n - T_{(d)} =$$

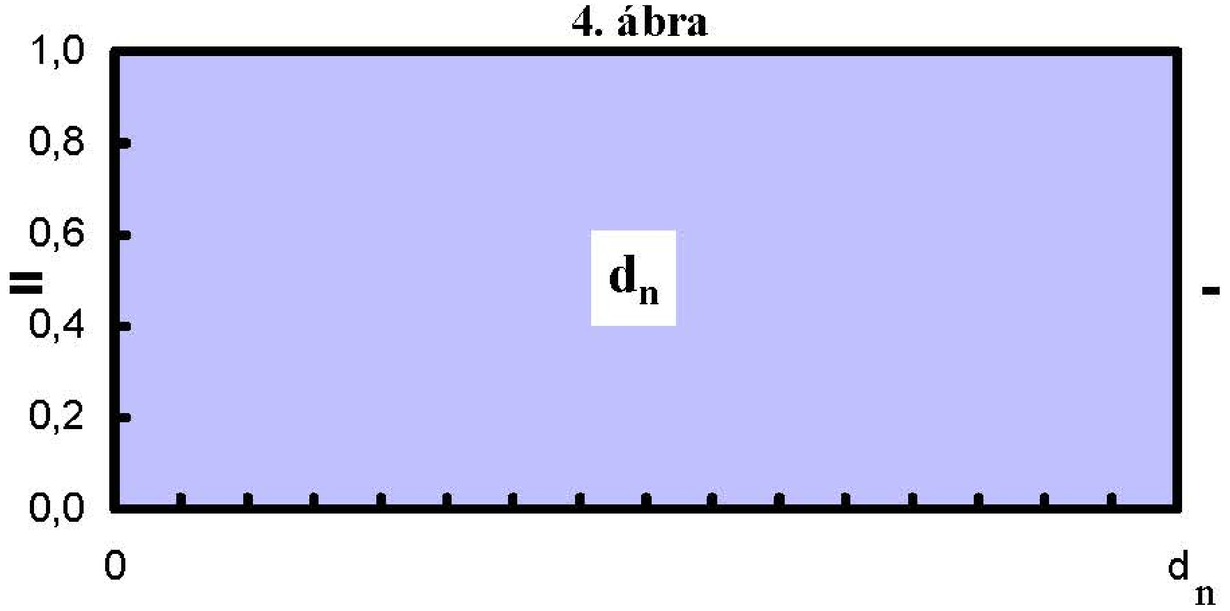
$$= \frac{1}{200} * \left[100 * (d_{n-1} + d_n) + \sum_{i=2}^{n-1} p_i^{\%} * (d_{i-1} - d_{i+1})\right] \quad [mm] \qquad (2)$$

A *2. egyenlet* levezetéséhez szükséges $T_{(d)}$ kifejezés az *1. egyenletből* $\delta=d$ helyettesítéssel származtatható.

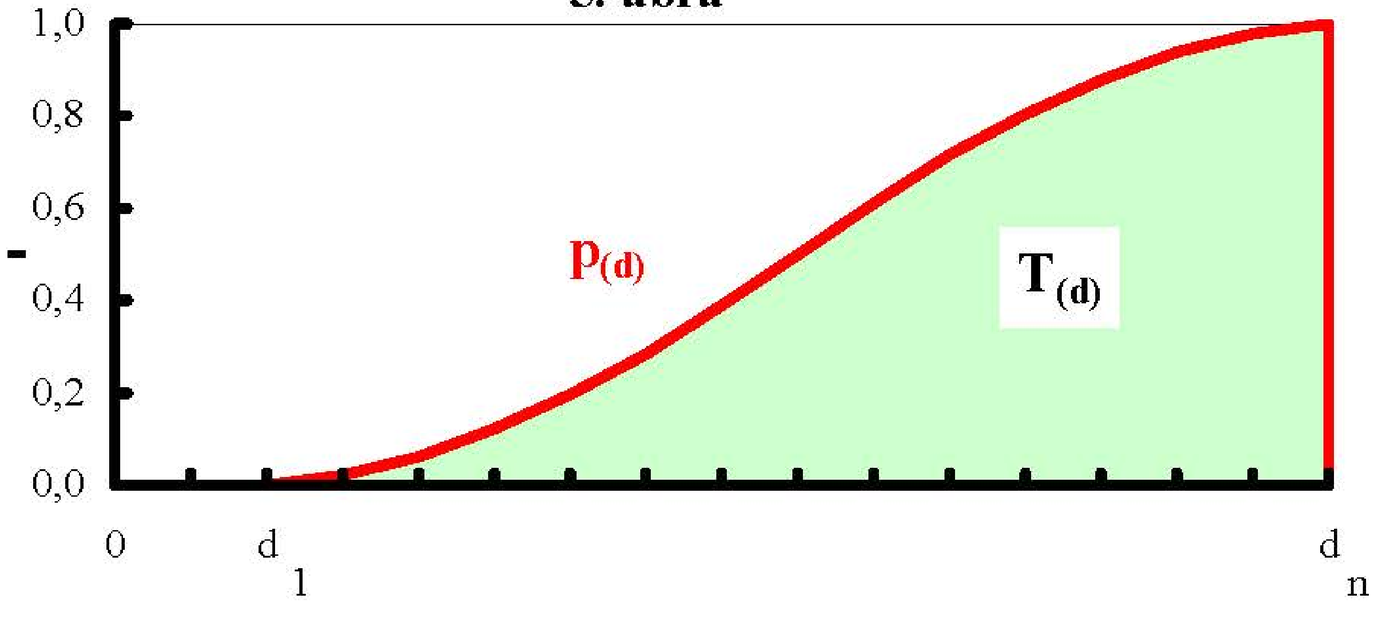
3. ábra (=) 4. ábra - 5. ábra



4. ábra



5. ábra



Ugyanis a $p'_{(d)}$ gyakoriságfüggvény alatti területnek az ordinátatengelyre vett *n*-edrendű ν_n nyomatéka:

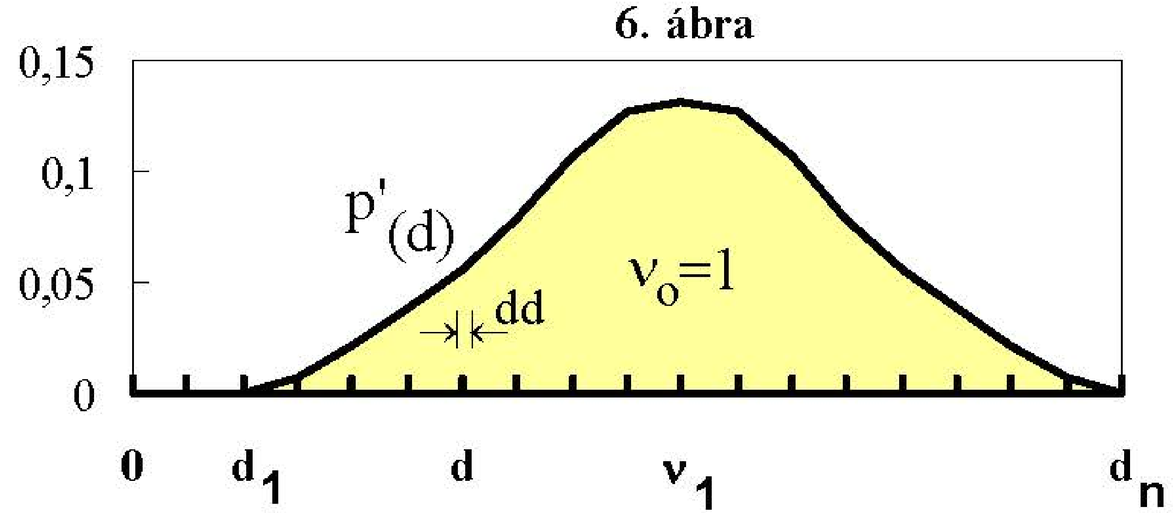
$$\upsilon_n = \int_{d_1}^{d_n} d^n * p'.dd \qquad \left[mm^n\right]$$

és a $p_{(d)}$ eloszlásfüggvény feletti területnek az ordinátatengelyre vett *(n-1)*-edrendű Ψ_{n-1} nyomatéka (ha *n* nem negatív szám):

$$\Psi_{n-1} = \int_{0}^{d_n} d^{n-1} * (1 - p).dd \qquad \left[mm^n\right]$$

A definícióból következik, hogy ν_0 nem más, mint a $p'_{(d)}$ gyakoriságfüggvény alatti terület, és értéke $\nu_0=1$ (*6. ábra*).

6. ábra



Továbbá, ha $n \neq 0$, illetve, ha $n=1$ akkor:

$$\upsilon_{n\neq 0} = n * \Psi_{n-1} \qquad \left[mm^n\right] \qquad \text{és} \qquad \upsilon_1 = \Psi_0 = m_{lin} \qquad \left[mm\right]$$

azaz az utóbbi egyben a lineáris finomsági modulus definíciója is.

Szórásnégyzet

Leegyszerűsítve mondhatjuk, hogy a $p'_{(d)}$ gyakoriságfüggvény és a hozzá tartozó $p_{(d)}$ eloszlásfüggvény *várhatóértékével* és *szórásnégyzetével* jellemezhető. Láttuk, hogy a *várhatóérték* a $p'_{(d)}$ gyakoriságfüggvény alatti területnek az ordinátatengelyre vett ν_1 elsőrendű nyomatékával egyenlő.

A **szórásnégyzet** a $p'_{(d)}$ gyakoriságfüggvény alatti területnek a várhatóérték függőlegesére vett μ_2 másodrendű centrális nyomatéka. Bizonyítható, hogy a szórásnégyzet, azaz a μ_2 másodrendű centrális nyomaték egyenlő a ν_2 másodrendű nyomaték és a ν_1 elsőrendű nyomaték négyzetének különbségével, ami nem más, mint a lineáris beosztású abszcisszatengellyel rendelkező koordinátarendszerben ábrázolt szemeloszlásgörbe feletti terület - az ordinátatengelyre vett - kétszeres Ψ_1 elsőrendű nyomatékának és a várhatóérték négyzetének különbsége [1]:

$$\sigma^2 = \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^{\,2} = 2 * \Psi_1 - m_{lin}^{\,2} \qquad [mm^2]$$

ahol esetünkben $n=2$ alkalmazása mellett, μ_n általánosságban a $p'_{(d)}$ gyakoriságfüggvény alatti területnek a várhatóérték függőlegesére vett n-edrendű centrális nyomatéka:

$$\mu_n = \int_{d_1}^{d_2} (d - \nu_1)^n * p'.dd \qquad [mm^n]$$

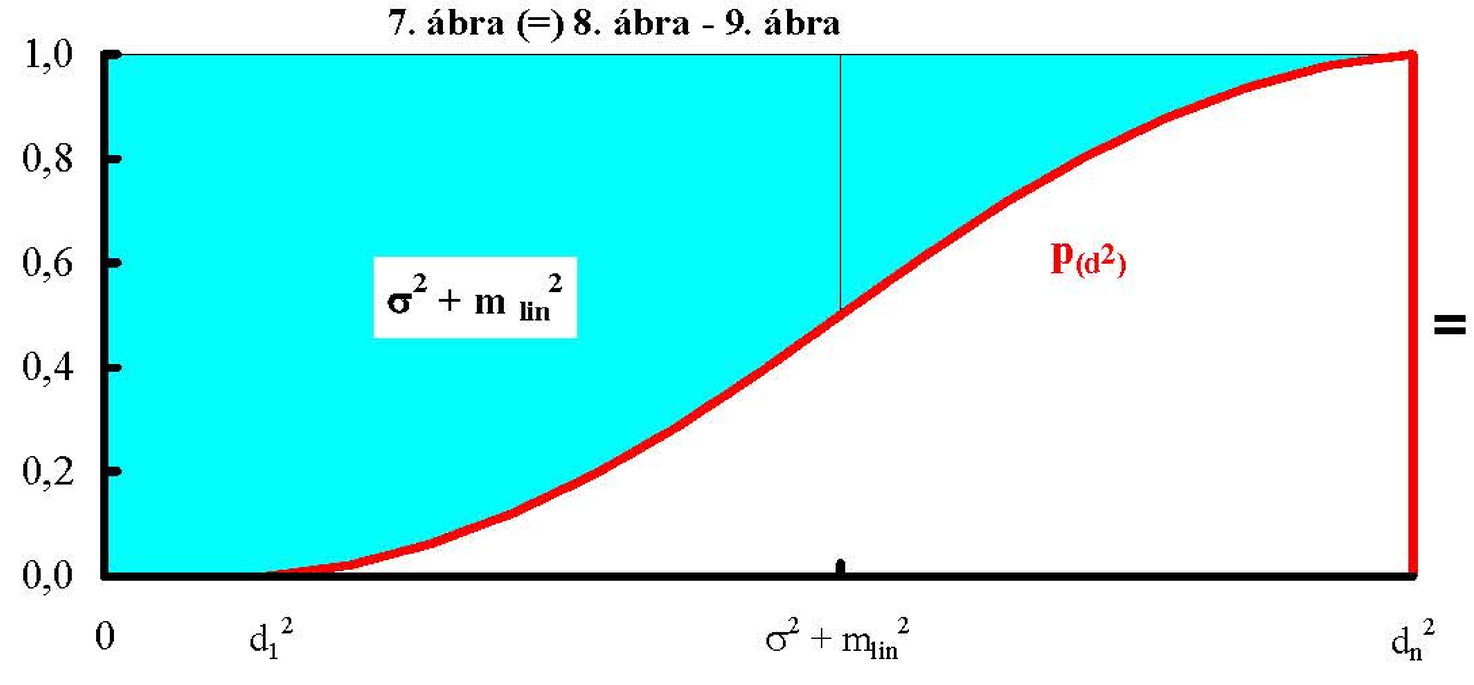
Ha a p eloszlásfüggvényt nem lineáris, hanem **négyzetes beosztású abszcisszatengellyel** rendelkező koordinátarendszerben ábrázoljuk, akkor a kétszeres Ψ_1 elsőrendű nyomaték helyébe nulladrendű nyomaték lép, azaz a **szórásnégyzet** egyenlő a **négyzetes beosztású abszcisszatengellyel** rendelkező koordinátarendszerben ábrázolt szemeloszlásgörbe $d=0$ és $d_n^{\,2}$ határú intervalluma feletti ($d_n^{\,2}$-$T_{(d^2)}$) terület és a várhatóérték négyzete különbségével, azaz

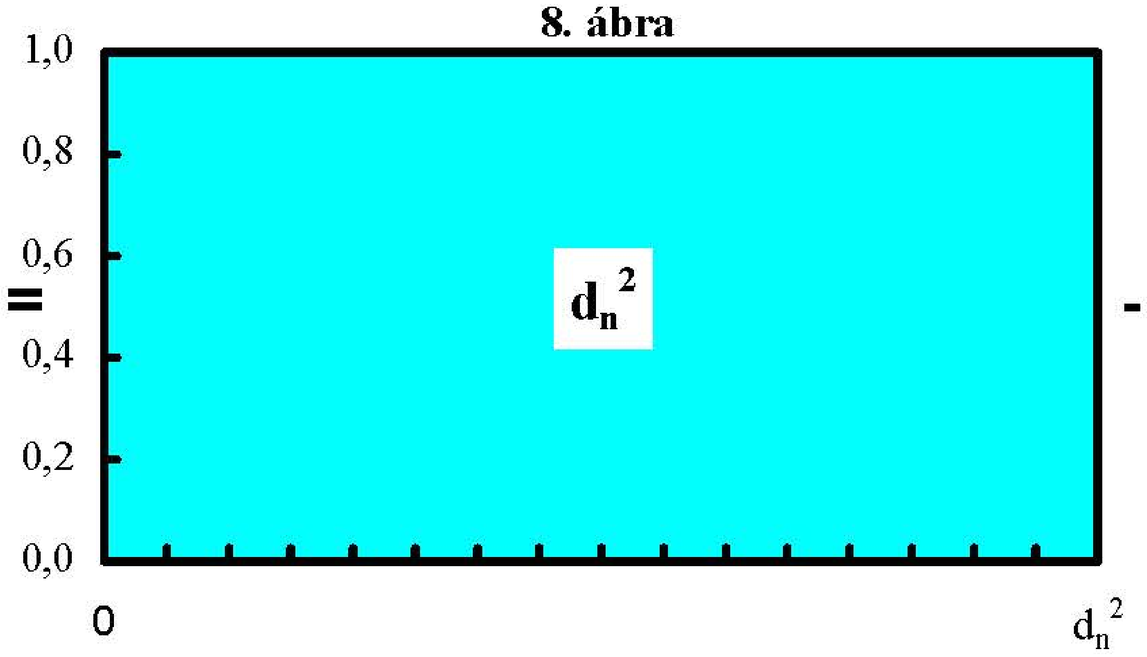
$$\sigma^2 = d_n^{\,2} - T_{(d^2)} - m_{lin}^{\,2} =$$

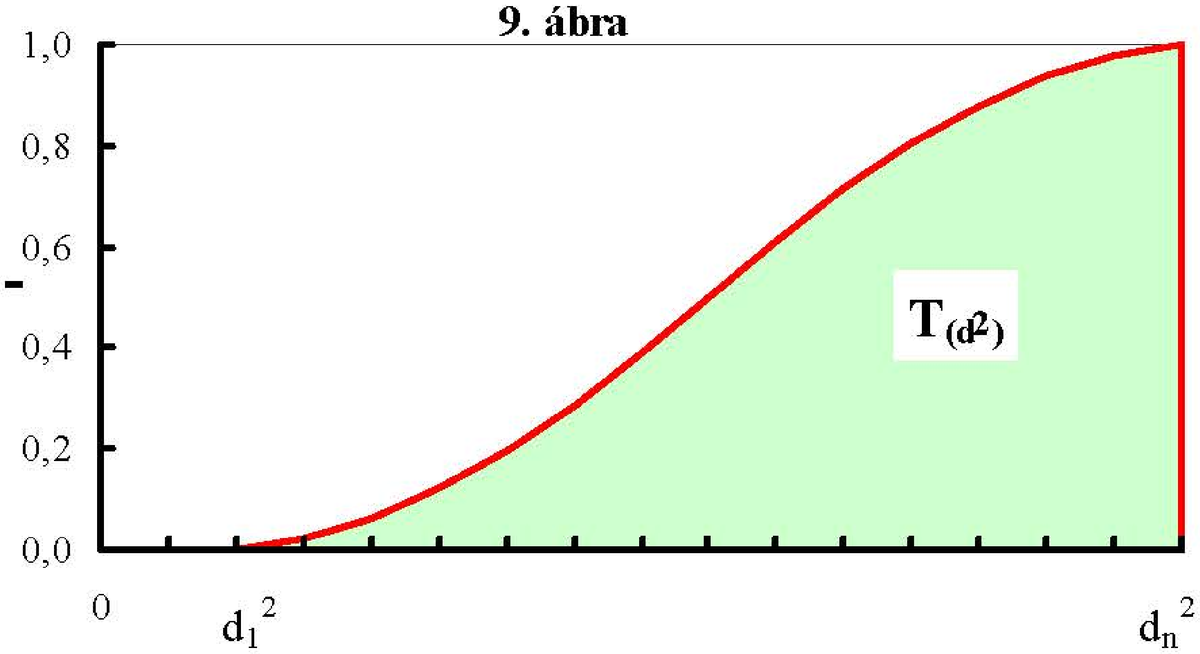
$$= \frac{1}{200} * [100 * (d_{n-1}^{\,2} + d_n^{\,2}) + \sum_{i=2}^{n-1} p_i^{\,\%} * (d_{i-1}^{\,2} - d_{i+1}^{\,2})] - m_{lin}^{\,2} \qquad [mm^2] \qquad (3)$$

A *3. egyenlet* tartalma a *7.-9. ábrákkal* kifejezve:

σ^2 (=) 7. ábra - $m_{lin}^{\,2}$ = 8. ábra - 9. ábra - $m_{lin}^{\,2}$







A σ^2 szórásnégyzet felhasználásával kiszámítható:

- a σ *szórás*, mint a szórásnégyzet négyzetgyöke, [mm],
- a *relatív szórásnégyzet*, mint a szórásnégyzet és a lineáris finomsági modulus négyzetének hányadosa, amely nevezetlen szám:

$$\frac{\sigma^2}{m_{lin}^2}$$

- a σ/m_{lin} *relatív szórás*, mint a relatív szórásnégyzet négyzetgyöke, amely nevezetlen szám. A relatív szórás azonos a szemnagyság - mint valószínűségi változó - *variációs együtthatójával.*

A dolgozat következő fejezetéhez

Vissza a

Noteszlapok abc-ben ***Noteszlapok tematikusan***

tartalomjegyzékhez

Vissza a dolgozat tartalomjegyzékéhez

Logaritmikus várhatóérték és átlagos szemnagyság

A szemeloszlásgörbe várható értékét vagy más néven lineáris finomsági modulusát lineáris beosztású abszcisszatengelyű koordinátarendszerben értelmeztük. Ha a szemeloszlásgörbét tízes alapú **logaritmikus beosztású abszcisszatengellyel** rendelkező koordinátarendszerben ábrázoljuk, akkor az előzőekben tárgyalt várhatóérték helyébe a **logaritmikus várhatóérték** lép. Minthogy a logaritmikus várhatóérték nem más, mint az átlagos szemnagyság tízes alapú logaritmusa ($lg\ d_{átlag}$), következik, hogy felhasználásával az **átlagos szemnagyság** kiszámítható. Az átlagos szemnagyságot tehát tízes alapú logaritmikus beosztású abszcisszatengelyű koordinátarendszerben értelmezzük, és számértéke eltér a lineáris finomsági modulus számértékétől.

A várhatóértéket meghatározása szerint az eloszlásfüggvény feletti terület fejezi ki. A zérus kezdőértékű lineáris abszcisszatengely felett e terület határai $d=0$ és d_n, azaz az ordinátatengely és a legnagyobb szemnagyság.

Logaritmikus beosztású abszcisszatengely esetén a legnagyobb szemnagyság a ($lg\ d_n$) helyen található, de az ordinátatengely helyének értelmezése ennél bonyolultabb, mert az abszcisszatengely kezdőértéke - mivel $(lg\ 0)=-\infty$ - az eddigiektől eltérően zérustól különböző szám kell, hogy legyen. Az ordinátatengely szerepét a $(lg\ 1)=0$ értékű abszcisszarendező veszi át, amely két térfélre osztja a koordinátarendszert. Minthogy az egynél kisebb számok logaritmusa zérusnál kisebb értékű, azaz negatív előjelű, a $(lg\ 1)=0$ értékű abszcisszarendezőtől balra eső térfél előjele negatív lesz. A $d_1<1$ mm legkisebb szemnagyságú szemeloszlásgörbe a legnagyobb szemnagyság értékétől függően e negatív térfélben helyezkedik el (ha $d_n<1$ mm), vagy a pozitív térfélből oda átnyúlik (ha $d_n>1$ mm). Ez utóbbi lehetőséget tekinthetjük a gyakorlatban leginkább előforduló általános esetnek.

Így a logaritmikus várhatóértékkel kapcsolatban nem beszélhetünk görbe feletti, hanem csak görbével határolt területről. Eszerint a **logaritmikus várhatóérték** azonos a logaritmikus beosztású abszcisszatengellyel rendelkező koordinátarendszerben ábrázolt eloszlásfüggvénnyel határolt területtel, amely a $(lg\ 1)=0$ értékű abszcisszarendezőtől balra lévő negatív térfélben görbe alatti, az attól jobbra lévő pozitív térfélben görbe feletti részterület (*10. ábra*), amit a következőképpen lehet kifejezni:

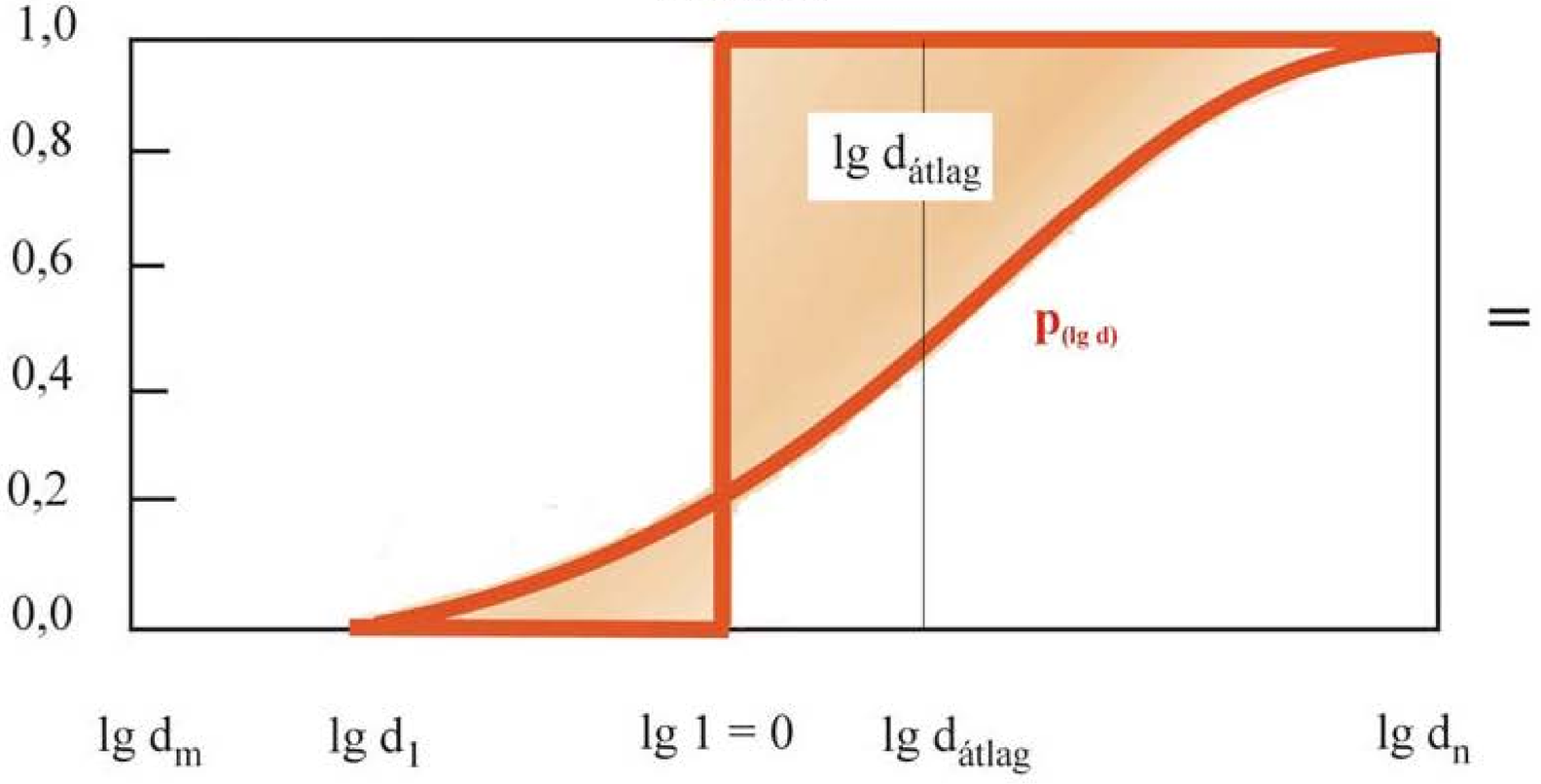
$$\lg d_{átlag} = \lg d_n - T_{(\lg d)} =$$

$$= \frac{1}{200} * \left[100 * (\lg d_{n-1} + \lg d_n) + \sum_{i=2}^{n-1} p_i^{\%} * (\lg d_{i-1} - \lg d_{i+1}) \right] \qquad (4)$$

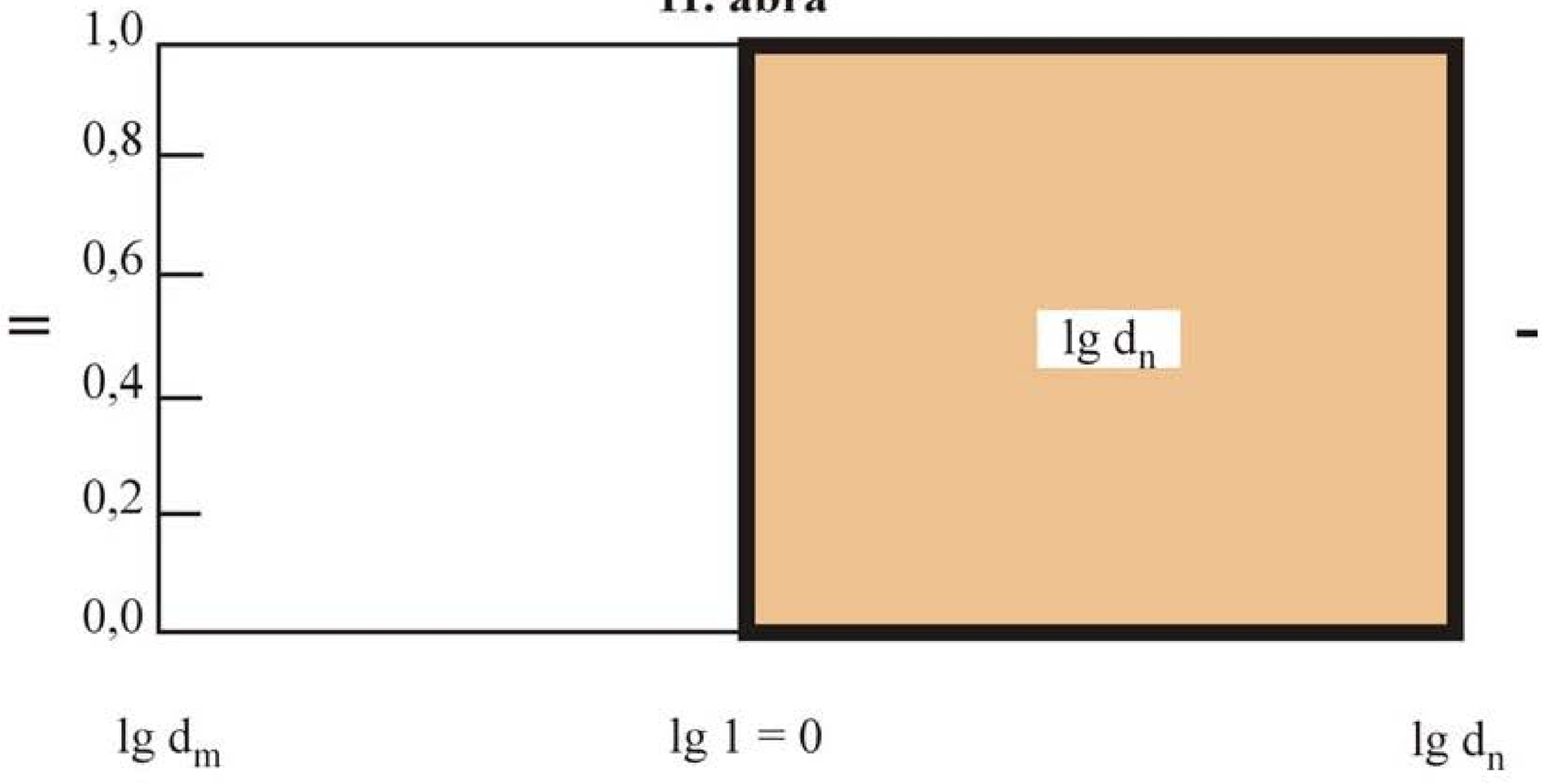
A *4. egyenletbe* a d értékét mm-ben helyettesítjük be, a ($lg\ d_{átlag}$) értékét pedig nevezetlen számnak tekintjük.

A *4. egyenlet* tartalma a *10.-12. ábrákkal* kifejezve:
$\lg d_{átlag}$ (=) 10. ábra = 11. ábra - 12. ábra

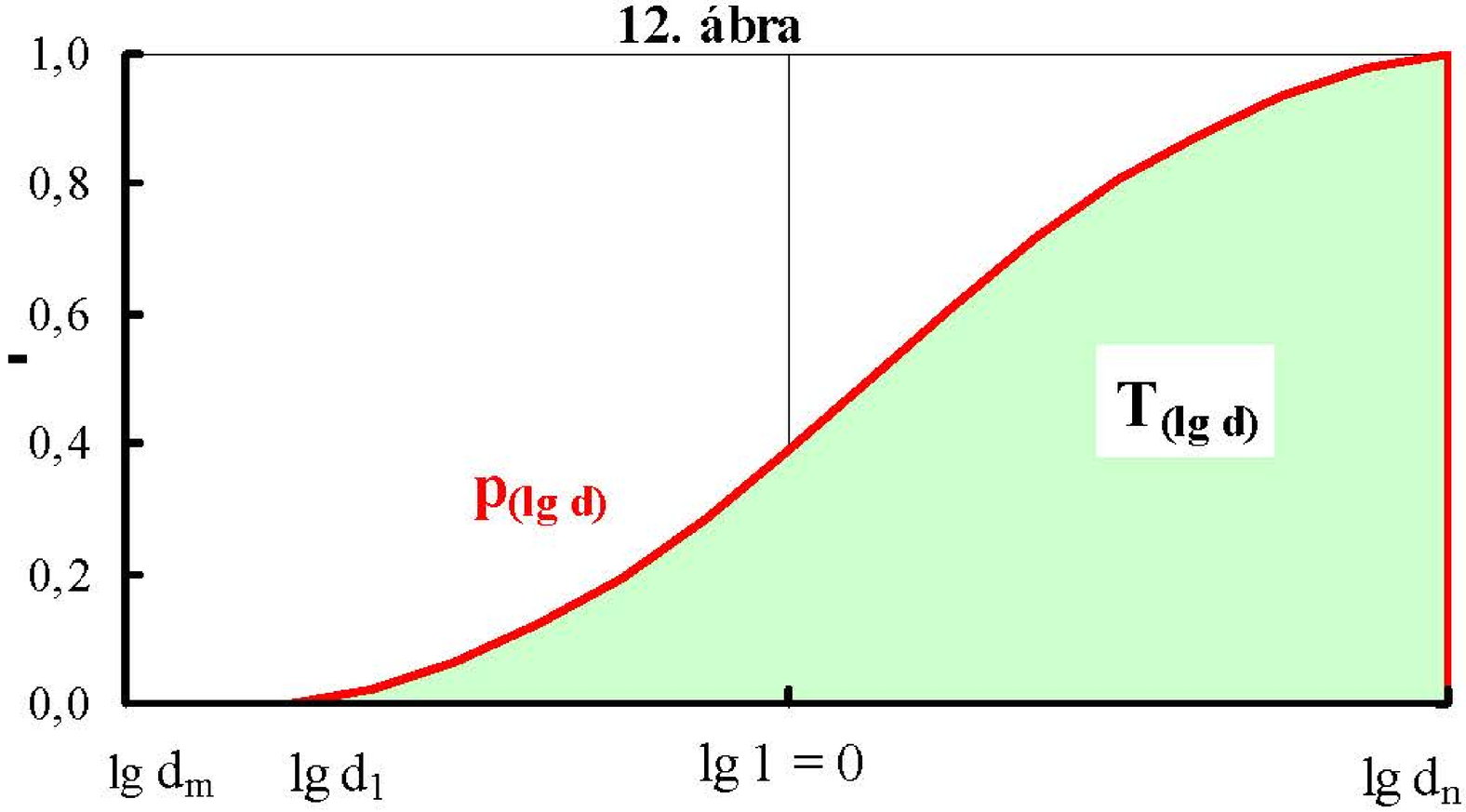
10. ábra



11. ábra



12. ábra



Az **átlagos szemnagyság** ($d_{átlag}$) a logaritmikus várhatóérték ($lg\ d_{átlag}$) numerusa, amelyet a *4. egyenlet* értékének meghatározása után számíthatunk ki:

$$d_{átlag} = 10^{\lg d_{átlag}} \qquad [mm] \qquad (5)$$

A *10. ábrán* kiemelt területet szemlélve belátható, hogy a ($lg\ d_{átlag}$) logaritmikus várhatóérték, és így a $d_{átlag}$ logaritmikus átlagos szemnagyság is, független az abszcisszatengely ($lg\ d_m$) kezdőértékétől.

A dolgozat következő fejezetéhez

Vissza a

Noteszlapok abc-ben

Noteszlapok tematikusan

tartalomjegyzékhez

Vissza a dolgozat tartalomjegyzékéhez

Hummel-féle terület és logaritmikus finomsági modulus

A logaritmikus finomsági modulus a logaritmikus várhatóértékből származtatható. Levezetéséhez kell számítani az $F_{(lg\ d)}$ ***Hummel*-féle területet**, amely a klasszikus megfogalmazás szerint azonos a tízes alapú **logaritmikus beosztású abszcisszatengellyel** rendelkező koordinátarendszerben ábrázolt szemeloszlásgörbe feletti területtel, amely az abszcisszatengely ($lg\ d_m$) kezdőértékéig terjed. A művelet úgy hajtható végre, hogy a ($lg\ d_{átlag}$) és a ($lg\ d_m$) által képviselt területek különbségét kell képezni, ami a ($lg\ d_m$) negatív előjele miatt számszakilag összeadást jelent:

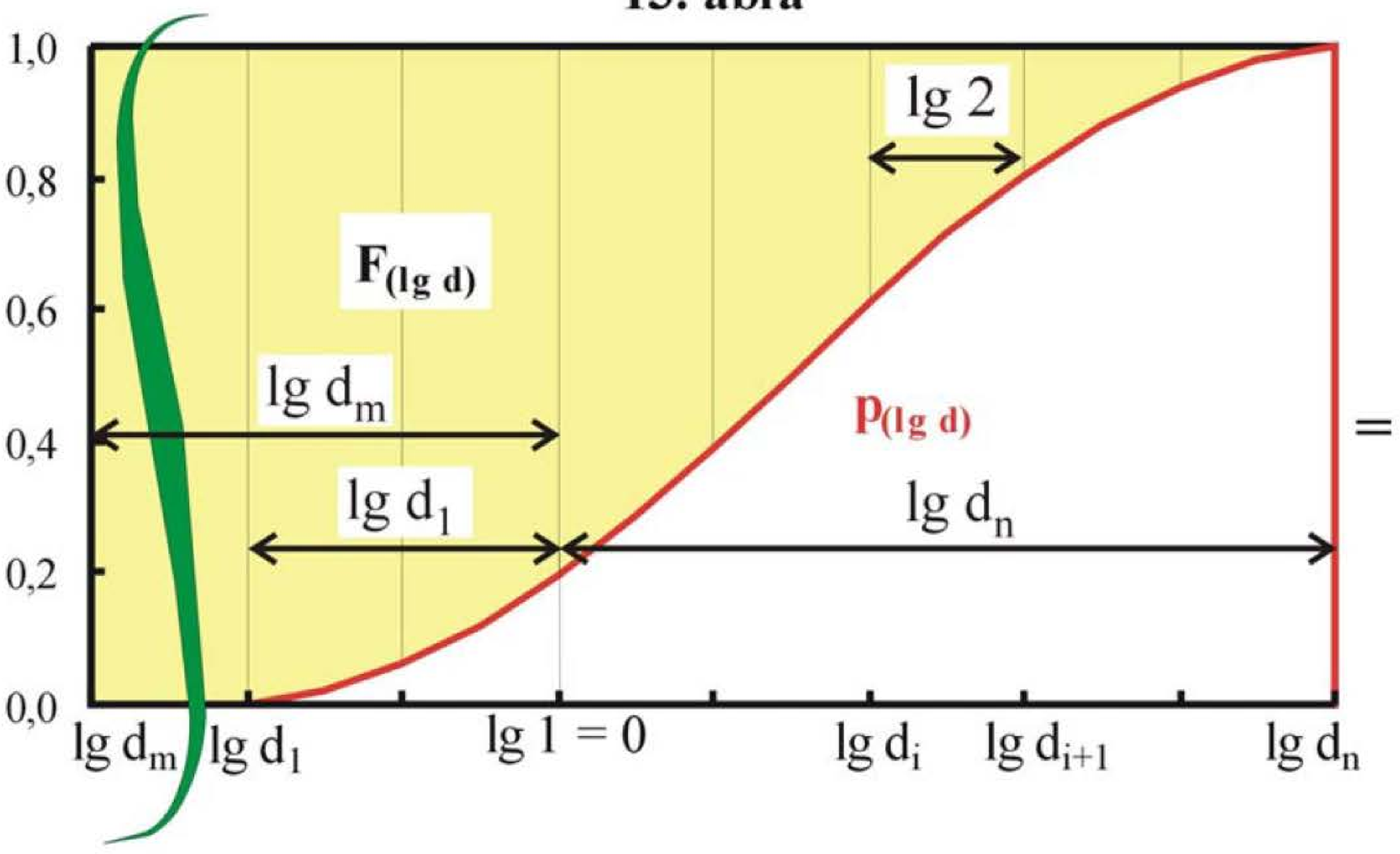
$$F_{(\lg d)} = \lg d_{átlag} - \lg d_m = m_{\lg} * \lg 2 \qquad (6)$$

A $d_{átlag}$ és d_m értékek mértékegysége mm, az $F_{(lg\ d)}$ értéke nevezetlen szám.

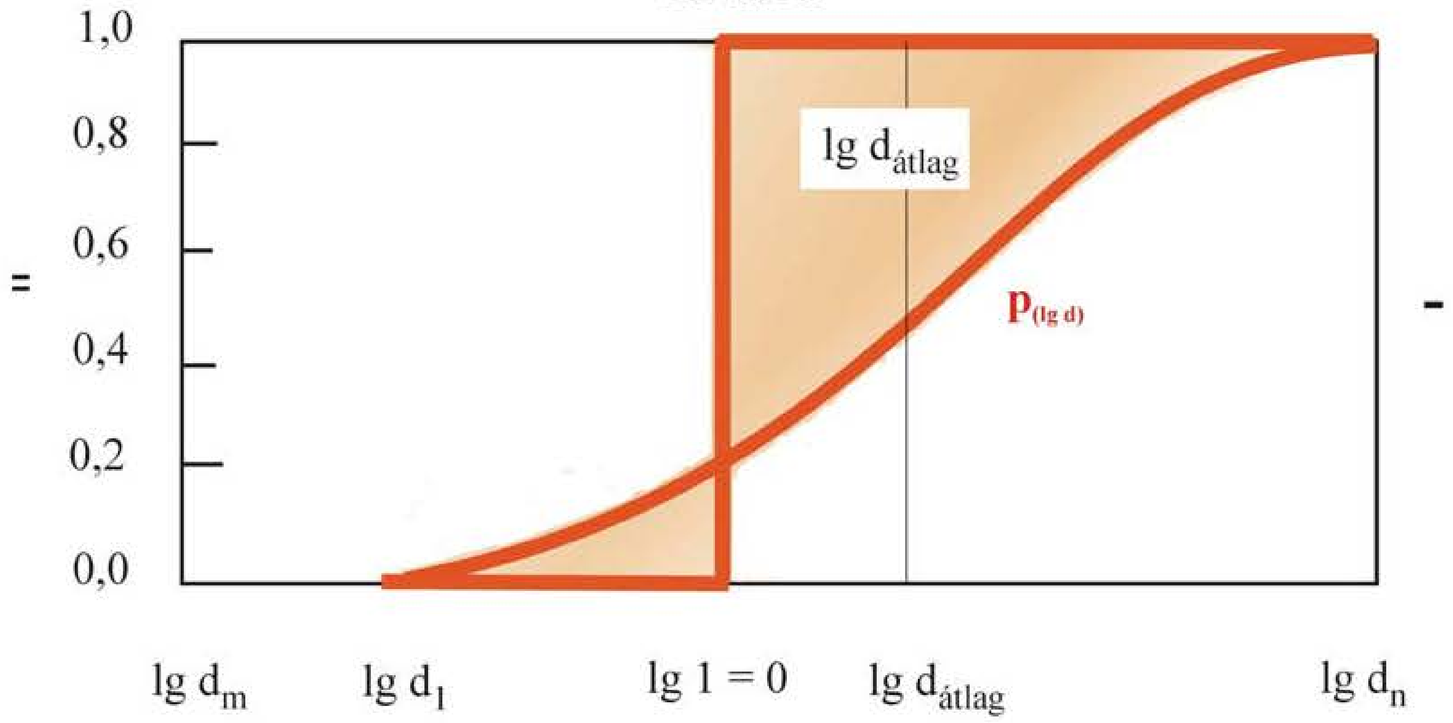
Az m_{lg} a **logaritmikus finomsági modulus**.

A *6. egyenlet* tartalma a *10., 13., 14. ábrákkal* kifejezve:
$F_{(lg\ d)}$ (=) 13. ábra = 10. ábra - 14. ábra

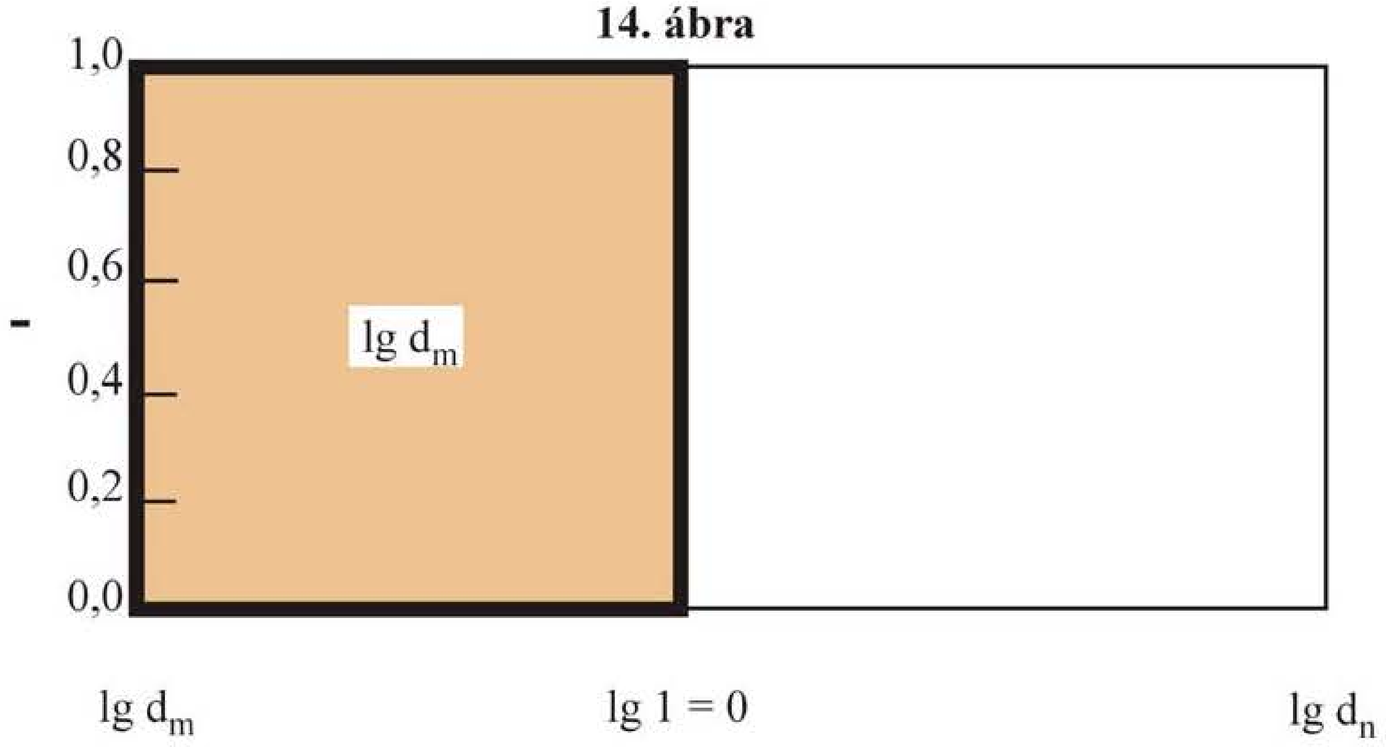
13. ábra



10. ábra



14. ábra



A *13. ábrán* jól lehet látni, hogy a **Hummel-féle terület** nagysága és következésképpen annak származékai, mint az alább tárgyalásra kerülő **logaritmikus finomsági modulusok**, jelentős mértékben függnek a Hummel-féle területet határoló *(lg d_m)* abszcisszatengely kezdőérték, illetve az abszcissza-kezdőértéknek nevezett $d_m \neq 0$ szemnagyság megállapodás tárgyát képező értékétől.

Milyen kár, hogy a XX. század első felében élt híres betonkutatók, így az amerikai ***Duff A. Abrams*** 1918-ban, a német ***Alfred Hummel*** 1930-ban, majd neves követőik, mint a német ***M. Spindel*** 1931-ben, az osztrák ***O. Stern*** 1932-ben, és később mások is, a beton adalékanyagok szemeloszlását a - gyakorlat számára kétségtelenül szemléletes és jól kezelhető - görbe feletti $F_{(lg\ d)}$ területtel hozták összefüggésbe és nem az abszcisszatengely kezdőértéktől független $d_{átlag}$ logaritmikus átlagos szemnagysággal jellemezték.

Abrams a szemeloszlás vizsgálathoz az amerikai *Tyler-féle* szitasorozatot használta, amelynek jellemzője, hogy a legfinomabb szita lyukbősége, azaz az abszcissza-kezdőérték *0,147* mm, és a többi szita lyukbősége mindig a sorozatban előtte álló szitáénak a kétszerese, azaz $0{,}147*2^{(k-1)}$, ahol $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Ezt logaritmizálva a szitalyukbőségek helye a logaritmikus beosztású abszcisszatengelyen: *(lg 0,147) +(k-1)*(lg 2)*, azaz egymástól való távolságuk mindig (*lg 2*), tehát konstans (*13. ábra*).

Felhasználva a *Tyler-féle* abszcisszatengely beosztásnak ezt a tulajdonságát, a *Hummel-féle* $F_{(lg)}$ terület felírható olyan részterületek összegeként, amelyek mindegyikének alaphossza (*lg 2*), magasságuk pedig a részterületek oldalhosszából, azaz a $(1-p_i)$ ordinátametszékekből kiszámítható (*2. ábra, 13. ábra*). A *6. egyenlet* felírásakor ezt a módszert követtük:

$$F_{\lg} = f_{(1-p_i)} * \lg 2 = m_{\lg} * \lg 2 \qquad ahol \qquad m_{\lg} = \frac{F_{\lg}}{\lg 2} = f_{(1-p_i)} \qquad (7.1)$$

a **logaritmikus finomsági modulus**. Értéke nevezetlen szám.

Ettől bizonyos mértékben eltér a termékminősítés gyakorlata, amely az ugyancsak (*lg2*) alaphosszakhoz tartozó $(1-p_i)$ ordinátametszékeket - azaz a duplázódó lyukbőségű szitasorozattal végzett szitálás göngyölített relatív tömegmaradékait - nem a részterületek oldalhosszának, hanem magasságának tekinti, és akkor az *F Hummel-féle* terület:

$$F = \sum_{i=1}^{n}(1-p_i) * \lg 2 = m * \lg 2 \qquad ahol \qquad m = \sum_{i=1}^{n}(1-p_i) \qquad (7.2)$$

a **finomsági modulus termékminősítő értéke**, amit egyszerűen csak finomsági modulusnak szoktak nevezni. Számértéke valamelyest eltér a fenn bemutatott logaritmikus finomsági modulus számértékétől, de a gyakorlatban az eltérést nem szokás figyelembe venni. Értéke ugyancsak nevezetlen szám.

A *Tyler-féle* szitasorozatot és abszcisszatengely beosztást az *Abrams* utáni idők betonkutatói is lényegében megtartották, de a legfinomabb szita lyukbőségeként, azaz abszcissza-kezdőértékként főképp Európában, az itteni hosszmértékeknek és egyéb szempontoknak jobban megfelelő, egyéb számértékeket választottak. Ezekről az *1. táblázatban* adunk áttekintést.

1. táblázat	
Forrás megnevezése (kutató, szabvány, műszaki előírás)	Abszcissza-kezdőérték d_m [mm]
Finomsági modulus számítása	
Abrams, 1918	0,147
Hummel, 1930	0,1
Spindel, 1931	0,001
Stern, 1932	0,001
Palotás*, 1952	0,1
MSZ 4713:1955	0,1
Palotás*, 1961	0,15
MSZ 4713-3:1977	0,063
MSZ 18288-1:1983	0,063 vagy 0,125
MSZ EN 12620:2003	0,125
MSZ 4798-1:2004	0,063
Könnyű adalékanyagok *Hummel-féle* szétmorzsolódási tényezőjének számítása	
Hummel, 1954	1,0
IME 37:1959	1,0
MSZ 7030:1962	1,0
MSZ 18287-3:1983	0,5

* ***Dr. Palotás László*** (1905-1993.) akadémikus, a Budapesti Műszaki Egyetem egykori, neves professzora

A logaritmikus finomsági modulus és a termékminősítő finomsági modulus értékét tehát jelentősen befolyásolja az abszcissza-kezdőérték nagysága, amelyet ma,

hazánkban, a betontechnológiában, ha $d_1 \geq d_m$, gyakorlatilag és általában - egyéb feltételek hiányában - mindig $d_m = 0{,}063$ mm-nek veszünk fel.

Az abszcissza-kezdőérték nagysága természetesen a *Hummel-féle* szétmorzsolódási tényezőt is befolyásolja, ez azonban nem szemeloszlás-jellemző, hanem szemhalmaz-szilárdsági mutatószám, amely jelenlegi vizsgálódásainknak nem képezi közvetlen tárgyát.

A dolgozat következő fejezetéhez

Vissza a

Noteszlapok abc-ben

Noteszlapok tematikusan

tartalomjegyzékhez

Vissza a dolgozat tartalomjegyzékéhez

Térfogati fajlagos felület és (tömegi) fajlagos felület

A **térfogati fajlagos felület** az egységnyi testtérfogatú szemhalmaz szemeinek felületösszege, azaz a szemhalmaz szemei külső felülete összegének és a szemek - többnyire pórusokat is tartalmazó, tehát a külső felület által határolt - térfogata összegének hányadosa.

A gömb vagy kocka alakú, tehát idealizált szemalakú szemek halmazának f_v térfogati fajlagos felületét kifejezhetjük, mint a $p'_{(d)}$ gyakoriságfüggvény alatti területnek az ordinátatengelyre vett (-1)-rendű ν_{-1} nyomatéka hatszorosát:

$$f_v = 6 * \nu_{-1} = 6 * \int_{d_1}^{d_\infty} d^{-1} * p'.dd \qquad [mm^{-1}]$$

Bevezetve az $u=d^{-1}$ [mm^{-1}] jelölést és a fenti egyenletbe behelyettesítve megfelelőit, bizonyítható, hogy

$$f_v = 6 * \nu_{-1} = 6 * \left(\int_0^{u_\infty} du + \int_{u_\infty}^{u_1} p_{[u]}.du \right) \qquad \left[mm^{-1}\right]$$

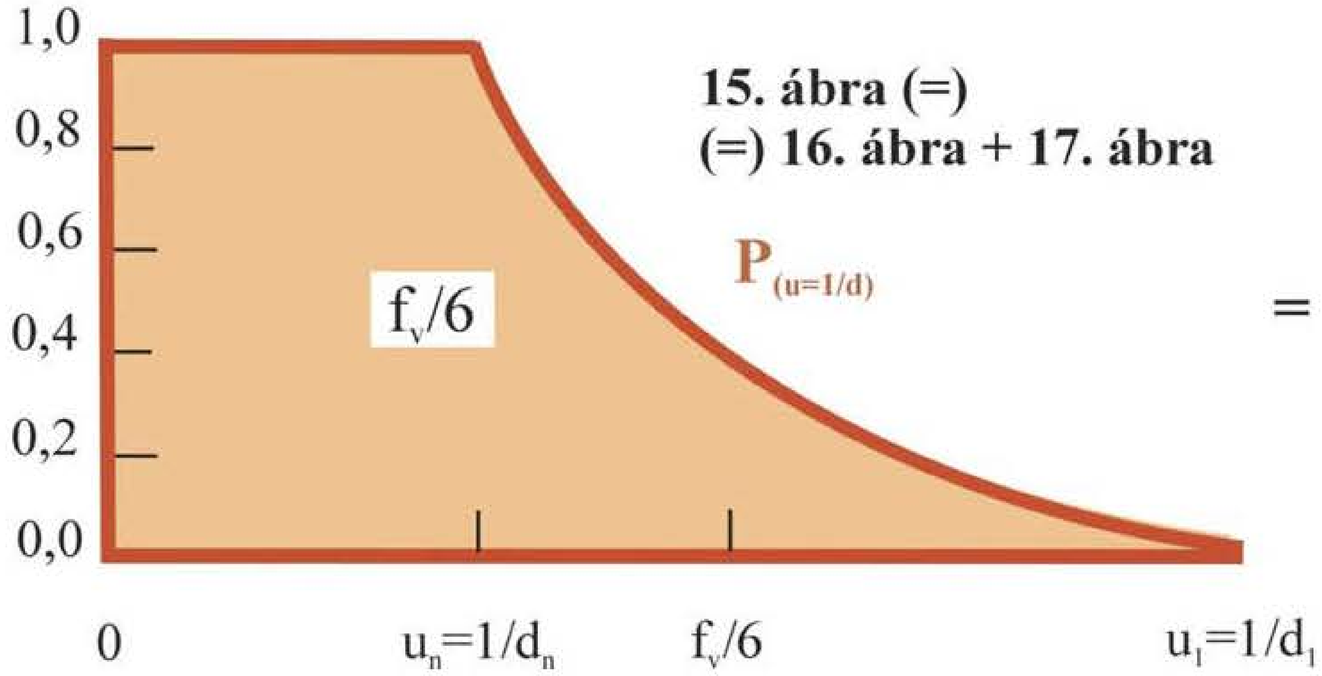
Eszerint a térfogati fajlagos felület a **reciprok beosztású abszcisszatengellyel** rendelkező koordinátarendszerben ábrázolt szemeloszlásgörbe alatti terület hatszorosával egyenlő, azaz

$$f_v = 6 * (d_n^{-1} + T_{(d^{-1})}) =$$

$$= \frac{3}{100} * \left[100 * (d_{n-1}^{-1} + d_n^{-1}) + \sum_{i=2}^{n-1} p_i^{\%} * (d_{i-1}^{-1} - d_{i+1}^{-1}) \right] \qquad \left[mm^{-1}\right] \qquad (8)$$

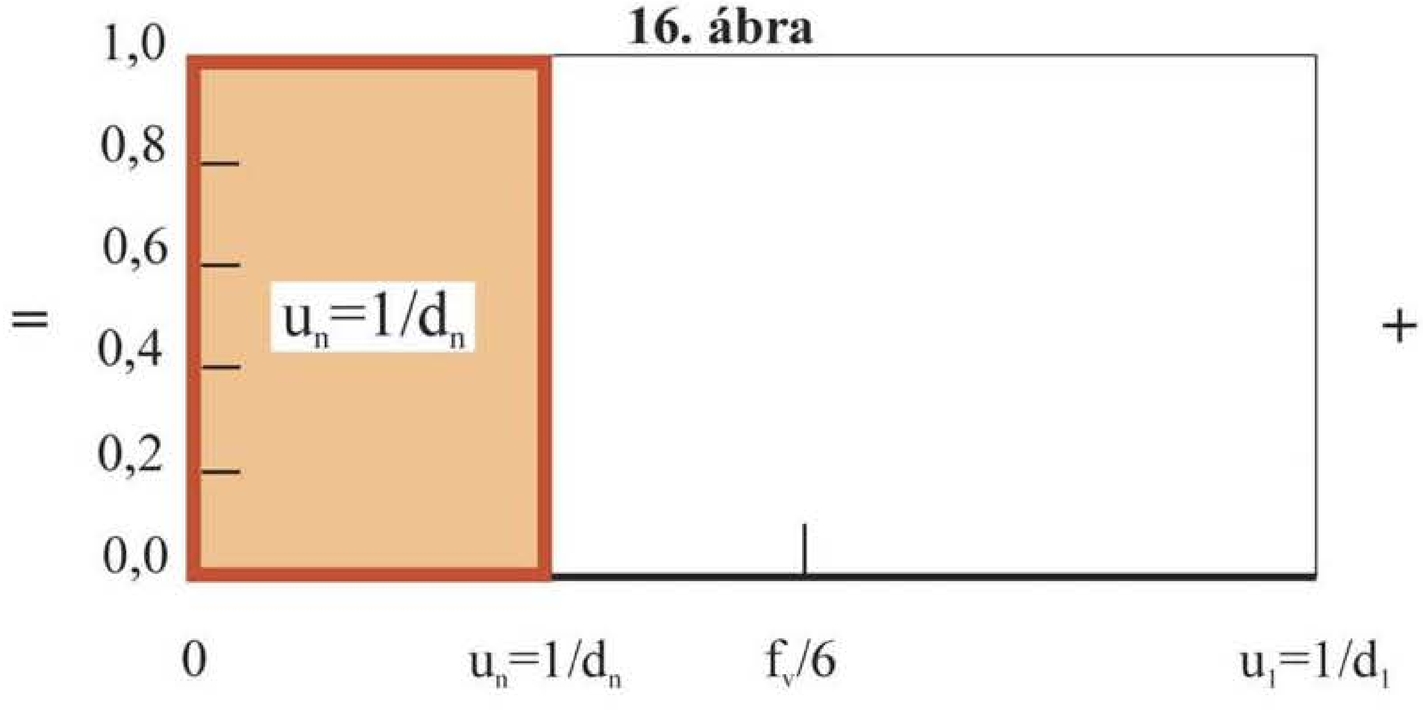
A *8. egyenlet* tartalma a *15.-17. ábrákkal* kifejezve:

f_v (=) 6*{15. ábra} = 6*{16. ábra + 17. ábra}

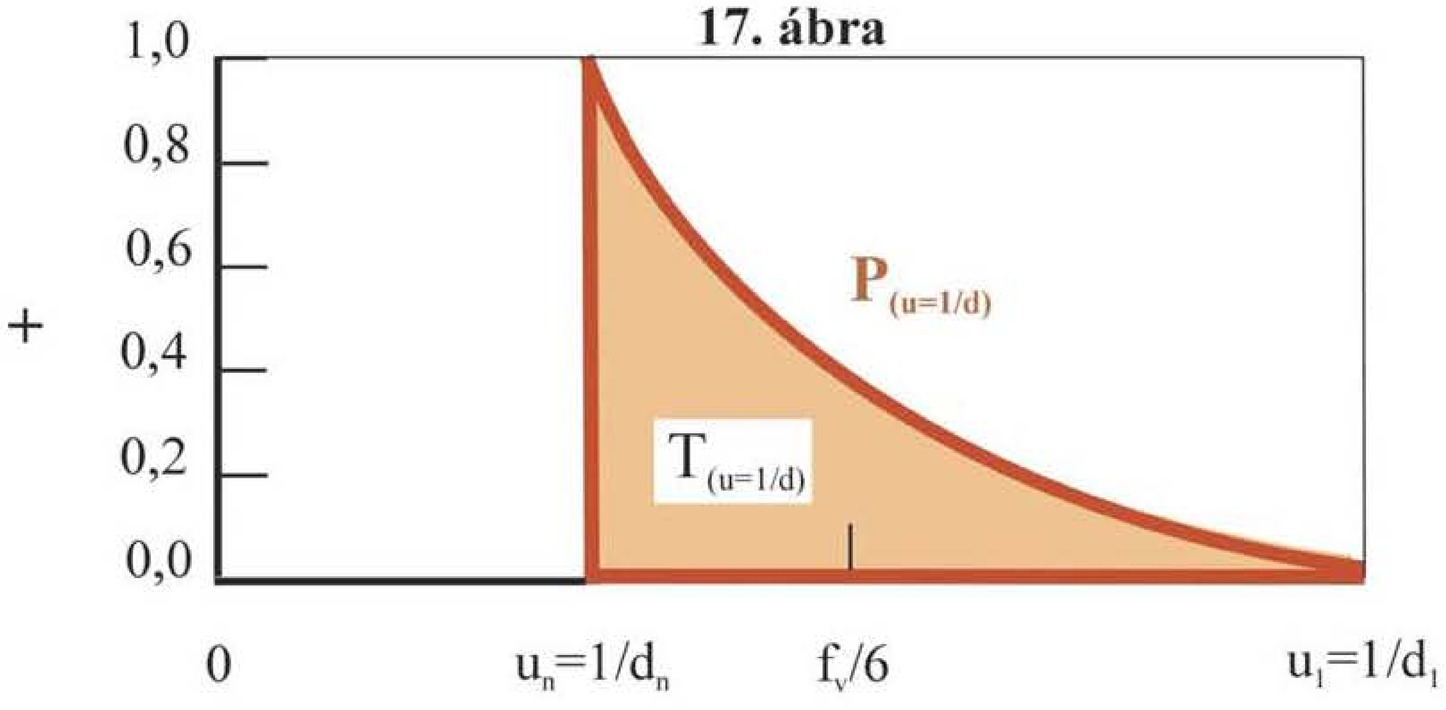


15. ábra (=)
(=) 16. ábra + 17. ábra

16. ábra



17. ábra



A szemhalmaz térfogati fajlagos felületének értéke nagyon érzékeny a finomszemek nagyságára és mennyiségére. Például szélső esetként a $d_1=0$ legkisebb szemnagyságú szemhalmazok térfogati fajlagos felületének számítása kifejezetten nehézségekbe ütközik, mert ha $d_1=0$, akkor $u_1=\infty$ és $f_v=\infty$, azaz a térfogati fajlagos felület értéke végtelen nagyra adódik. Ezért feltételül szoktuk szabni, hogy $d_1 \geq 0{,}001$mm illetve $u_1 \leq 1000$ mm^{-1} kell, hogy legyen. Bár e feltétel önkényes, értéke azért fogadható el, mert a beton-adalékanyagban a legfinomabb szemek az agyag szemek, (amelyek szemnagysága 0,002 mm-nél kisebb,) és ezek mennyiségét egyébként is tudatosan korlátozzuk.

Az építőanyagipari gyakorlatban a szemhalmazok egységnyi mennyiségére eső felületet a *térfogati fajlagos felület* helyett előszeretettel fejezik ki a **tömegi fajlagos felülettel**, amit egyszerűen **fajlagos felületnek** neveznek. Ennek méréstechnikai oka van, míg ugyanis a térfogati fajlagos felület egy számított szemeloszlás-jellemző, addig a fajlagos felület értékét meg lehet mérni. A fajlagos felület mértékegysége m^2/kg, ami 1000 mm^2/g-nak felel meg.

Az f fajlagos felület és az f_v térfogati fajlagos felület kapcsolatát a (9) összefüggés írja le.

$$f = 10^3 * \frac{f_v}{\rho_T} \qquad [m^2/kg] \qquad (9)$$

ahol:

f_v = a térfogati fajlagos felület [1/mm]

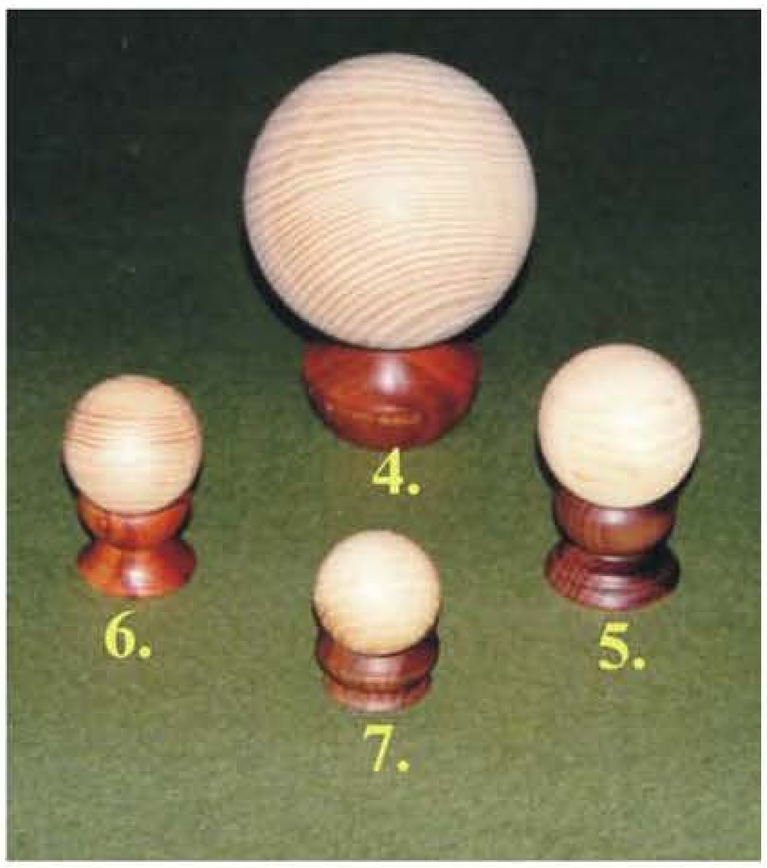
ρ_T = a kiszárított állapotú szemhalmaz szemeinek átlagos testsűrűsége [kg/m^3]

A fajlagos felület az anyag testsűrűségének is függvénye, ezért - a térfogati fajlagos felülettel ellentétben - nem tekinthető kifejezetten szemeloszlás-jellemzőnek, hiszen a fajlagos felület csak az azonos testsűrűségű szemek halmazai felületének közvetlen összevetésére alkalmas.

Ennek érzékeltetésére vegyünk néhány golyót, mérjük meg az átmérőjét és a tömegét, számítsuk ki a testsűrűségét, a fajlagos felületét, és a térfogati fajlagos felületét. A vizsgált golyók képe a következő fényképeken látszik.

4.
10.
11.
7.
6.
9.
5.
8.
1.
2.
3.

1.
2.
3.


4.
6.
5.
7.

8.
9.

2.1. táblázat: Különböző golyók (tömegi) fajlagos felületének és térfogati fajlagos felületének összevetése

Jel és megnevezés	Átmérő	Felület	Térfogat	Tömeg	Testsűrűség	Fajlagos felület	Térf. fajl. felület
	mm	mm^2	mm^3	g	kg/m^3	m^2/kg	mm^2/mm^3
1. Paesina mészkő	40,6	5178	35041	86,05	2456	0,0602	0,14778
2. Szerpentin	38,4	4632	29648	75,21	2537	0,0616	0,15625
3. Fluorit	31,5	3117	16366	52,16	3187	0,0598	0,19048
4. Kőrisfa	77,9	19064	247520	186,79	755	0,1021	0,07702
5. Égerfa	40,5	5153	34783	19,52	561	0,2640	0,14815
6. Kőrisfa	35,2	3893	22836	16,24	711	0,2397	0,17045
7. Tölgyfa	29,9	2809	13996	9,83	702	0,2857	0,20067
8. Acélgolyó, fényes	47,6	7118	56470	439,43	7782	0,0162	0,12605
9. Acélgolyó, matt	48,1	7268	58269	446,02	7655	0,0163	0,12474
10. Pingponglabda	37,7	4465	28056	3,33	119	1,3409	0,15915
11. Gumilabda	36,3	4140	25045	22,95	916	0,1804	0,16529

2.2. táblázat: Rendezés átmérő szerint, ami felület, térfogat és térfogati fajlagos felület szerinti rendezést is jelent, és amit ide kattintva grafikus formában is megtekinthet

Jel és megnevezés	Átmérő	Felület	Térfogat	Tömeg	Testsűrűség	Fajlagos felület	Térf. fajl. felület
	mm	mm^2	mm^3	g	kg/m^3	m^2/kg	mm^2/mm^3
7. Tölgyfa	29,9	2809	13996	9,83	702	0,2857	0,20067
3. Fluorit	31,5	3117	16366	52,16	3187	0,0598	0,19048
6. Kőrisfa	35,2	3893	22836	16,24	711	0,2397	0,17045
11. Gumilabda	36,3	4140	25045	22,95	916	0,1804	0,16529
10. Pingponglabda	37,7	4465	28056	3,33	119	1,3409	0,15915
2. Szerpentin	38,4	4632	29648	75,21	2537	0,0616	0,15625
5. Égerfa	40,5	5153	34783	19,52	561	0,2640	0,14815
1. Paesina mészkő	40,6	5178	35041	86,05	2456	0,0602	0,14778
8. Acélgolyó, fényes	47,6	7118	56470	439,43	7782	0,0162	0,12605
9. Acélgolyó, matt	48,1	7268	58269	446,02	7655	0,0163	0,12474
4. Kőrisfa	77,9	19064	247520	186,79	755	0,1021	0,07702

2.3. táblázat: Rendezés tömeg szerint

Jel és megnevezés	Átmérő	Felület	Térfogat	Tömeg	Testsűrűség	Fajlagos felület	Térf. fajl. felület
	mm	mm^2	mm^3	g	kg/m^3	m^2/kg	mm^2/mm^3
10. Pingponglabda	37,7	4465	28056	3,33	119	1,3409	0,15915
7. Tölgyfa	29,9	2809	13996	9,83	702	0,2857	0,20067
6. Kőrisfa	35,2	3893	22836	16,24	711	0,2397	0,17045
5. Égerfa	40,5	5153	34783	19,52	561	0,2640	0,14815
11. Gumilabda	36,3	4140	25045	22,95	916	0,1804	0,16529
3. Fluorit	31,5	3117	16366	52,16	3187	0,0598	0,19048
2. Szerpentin	38,4	4632	29648	75,21	2537	0,0616	0,15625
1. Paesina mészkő	40,6	5178	35041	86,05	2456	0,0602	0,14778
4. Kőrisfa	77,9	19064	247520	186,79	755	0,1021	0,07702
8. Acélgolyó, fényes	47,6	7118	56470	439,43	7782	0,0162	0,12605
9. Acélgolyó, matt	48,1	7268	58269	446,02	7655	0,0163	0,12474

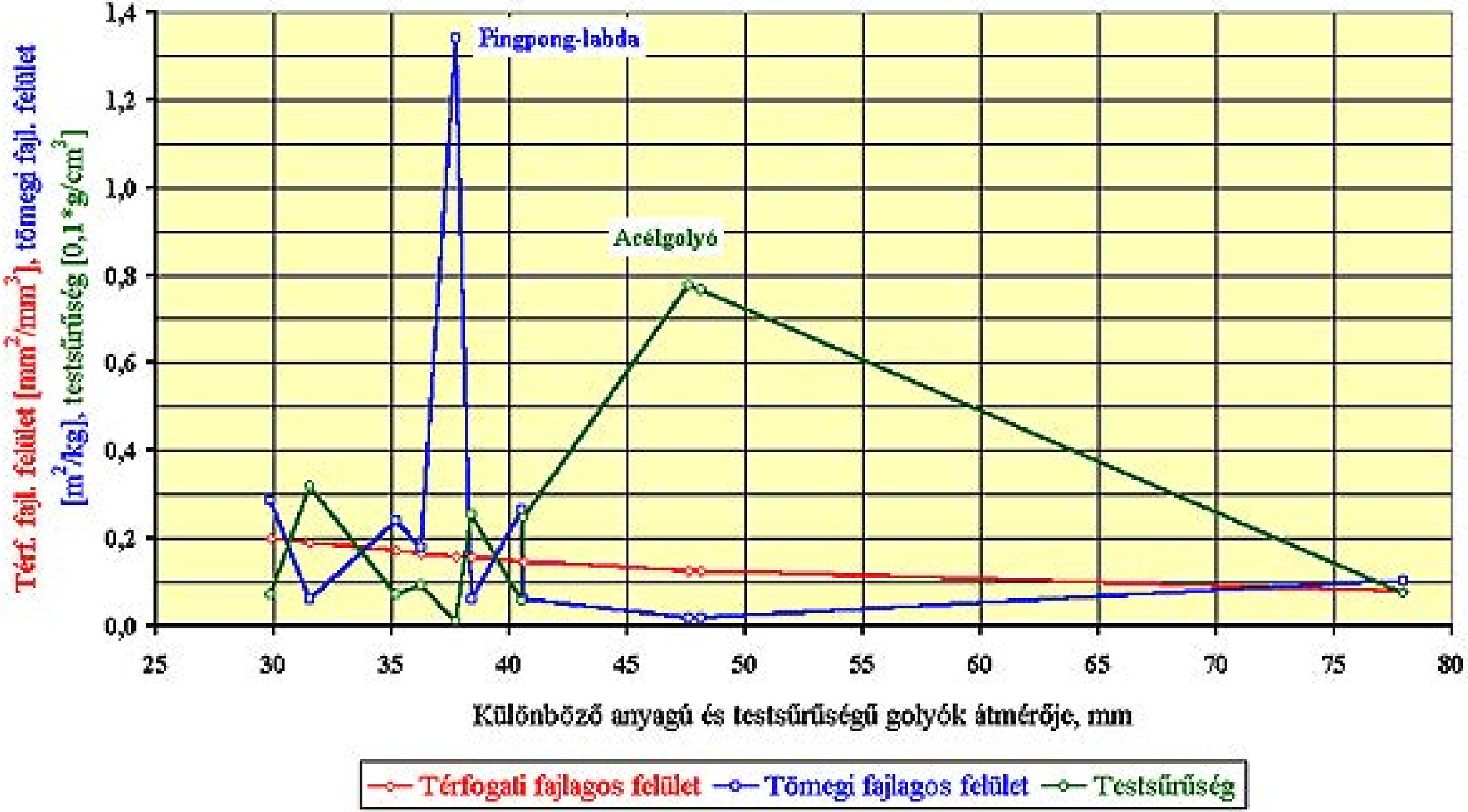
2.4. táblázat: Rendezés testsűrűség szerint

Jel és megnevezés	Átmérő	Felület	Térfogat	Tömeg	Testsűrűség	Fajlagos felület	Térf. fajl. felület
	mm	mm^2	mm^3	g	kg/m^3	m^2/kg	mm^2/mm^3
10. Pingponglabda	37,7	4465	28056	3,33	119	1,3409	0,15915
5. Égerfa	40,5	5153	34783	19,52	561	0,2640	0,14815
7. Tölgyfa	29,9	2809	13996	9,83	702	0,2857	0,20067
6. Kőrisfa	35,2	3893	22836	16,24	711	0,2397	0,17045
4. Kőrisfa	77,9	19064	247520	186,79	755	0,1021	0,07702
11. Gumilabda	36,3	4140	25045	22,95	916	0,1804	0,16529
1. Paesina mészkő	40,6	5178	35041	86,05	2456	0,0602	0,14778
2. Szerpentin	38,4	4632	29648	75,21	2537	0,0616	0,15625
3. Fluorit	31,5	3117	16366	52,16	3187	0,0598	0,19048
9. Acélgolyó, matt	48,1	7268	58269	446,02	7655	0,0163	0,12474
8. Acélgolyó, fényes	47,6	7118	56470	439,43	7782	0,0162	0,12605

2.5. táblázat: Rendezés fajlagos felület szerint

Jel és megnevezés	Átmérő	Felület	Térfogat	Tömeg	Testsűrűség	Fajlagos felület	Térf. fajl. felület
	mm	mm^2	mm^3	g	kg/m^3	m^2/kg	mm^2/mm^3
10. Pingponglabda	37,7	4465	28056	3,33	119	1,3409	0,15915
7. Tölgyfa	29,9	2809	13996	9,83	702	0,2857	0,20067
5. Égerfa	40,5	5153	34783	19,52	561	0,2640	0,14815
6. Kőrisfa	35,2	3893	22836	16,24	711	0,2397	0,17045
11. Gumilabda	36,3	4140	25045	22,95	916	0,1804	0,16529
4. Kőrisfa	77,9	19064	247520	186,79	755	0,1021	0,07702
2. Szerpentin	38,4	4632	29648	75,21	2537	0,0616	0,15625
1. Paesina mészkő	40,6	5178	35041	86,05	2456	0,0602	0,14778
3. Fluorit	31,5	3117	16366	52,16	3187	0,0598	0,19048
9. Acélgolyó, matt	48,1	7268	58269	446,02	7655	0,0163	0,12474
8. Acélgolyó, fényes	47,6	7118	56470	439,43	7782	0,0162	0,12605

Példa a térfogati és a tömegi fajlagos felület viszonyára



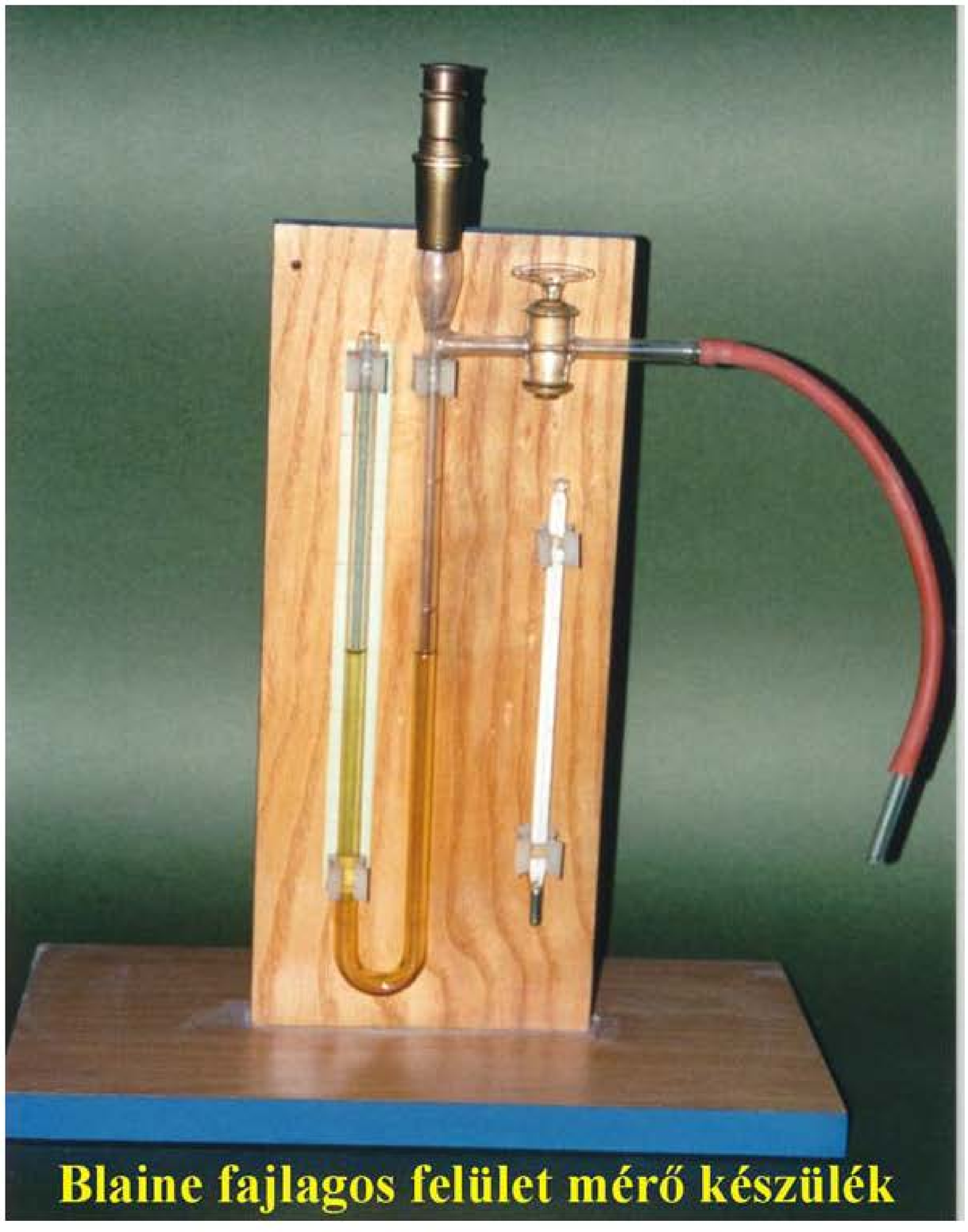
A mérés és számítás adatait a *2.1. táblázatban*, majd ennek sorait az átmérő, a tömeg, a testsűrűség, a fajlagos felület szerint növekvő sorba rendezve a *2.2. - 2.5.táblázatokban* tüntettük fel.

A 2.1. - 2.5. táblázatokat erre a mondatra kattintva tekintheti meg.

A táblázatok jól szemléltetik, hogy növekvő átmérőhöz mindig csökkenő térfogati fajlagos felület tartozik (*2.2. táblázat*), míg a fajlagos felületre nagy hatással van a testsűrűség, így a fajlagos felület értéke különböző testsűrűségek esetén, közel azonos átmérők mellett is különböző lehet (például az égerfa és a paesina mészkő, vagy a gumilabda, a pingponglabda és a szerpentin esete), illetve a nagy testsűrűséghez fordított átmérő viszony esetén is kis fajlagos felület tartozik (például a 4. jelű kőrisfa és az acélgolyók esete).

Mint a térfogati fajlagos felület, úgy a (tömegi) fajlagos felület is a finomszemekre érzékeny jellemző, ezért a **fajlagos felület laboratóriumi mérését** finom eloszlású anyagokon, főképp porokon szokták elvégezni. A mérésre iparáganként számtalan módszert alakítottak ki. Az építőanyagiparban a cementek őrlésfinomságát lehet a fajlagos felülettel jól kifejezi. [Cementipari kézikönyv, szerkesztette *Talabér József*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966. vagy *Palotás László*: Mérnöki szerkezetek anyagtana. 2. kötet. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979.]

A cementek fajlagos felület mérésének legegyszerűbb és legelterjedtebb módszere a légáteresztő képesség vizsgálatán alapú *Blaine eljárás*, amelynek leírása az MSZ EN 196-6:1992 illetve a már hatálytalan MSZ 523-2:1975 szabványban megtalálható. A *Blaine készülékkel* mért értékek 1994-ig termékminősítő értékek voltak (MSZ 4702-2:1981, MSZ 4702-4:1982), ma már nem azok (MSZ ENV 197-1:1994, majd MSZ 4702-2:1997). A fényképen a BME Építőanyagok és Mérnökgeológia Tanszékének hagyományos kivitelű Blaine készüléke látható. (A készüléknek létezik automata változata is, de a fényképe nem sokat mond.)



Ugyanitt fényképeztük a hordozható kivitelű *PSZH* (Poverhnosztemer SZisztemü Hodakova) fajlagos felület mérő készüléket is. [Irodalom: Grigor Szemjonovics Hodakov: Tonkoje izmelcsenie sztroityelnüh. Moszka, 1972.] Működési elve hasonló a Blaine készülékéhez, a PSZH-4 típusú készülék leírását az MSZ 523-2:1975 szabvány tartalmazta, ma már nem használatos.

A légáteresztő képesség vizsgálatán alapú fajlagos felület mérési módszerek csak zárt pórusú anyagok esetén adnak tényleges értéket.

A cementtechnológiai kutatások során eredményesen használják a *BET eljárást* [Brunauer, S. - Emmett, P. H. - Teller, E.: Absorption of gases in multimolecular layers. Journal of the American Chemical Society. 1938. Vol. 60. pp. 309.]. A módszerrel a porfelület beborításához szükséges gázmennyiségből következtetnek a fajlagos felületre, amelybe a nyílt pórusú szemcsék belső felülete is beleértendő. A fényképen a CEMKUT Cementipari Kutató-Fejlesztő Kft BET készülékét mutatjuk be.

Megjegyzés

Dolgozatunkban a $p'_{(\delta)}$ gyakoriságfüggvény és származékai alatt mindig *relatív tömeg-gyakoriságfüggvényt*, a hozzá tartozó $p_{(\delta)}$ eloszlásfüggvény és származékai alatt mindig *relatív tömeg-eloszlásfüggvényt* értettünk. Így van ez akkor is, amikor az ordinátatengely beosztása tömeg%.

Vissza a

Noteszlapok abc-ben ***Noteszlapok tematikusan***

tartalomjegyzékhez

Vissza a dolgozat tartalomjegyzékéhez